Samenvatting

In dit verslag onderzoek ik de oplosbaarheid van het beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \alpha_{2,0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + (\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,0})\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \\ &\quad + \alpha_{0,2}x^2u(x,t) + \alpha_{0,1}xu(x,t) + \alpha_{0,0}u(x,t) \qquad (0.1) \\ u(x,0) &= \phi(x) \qquad (0.2) \end{aligned}$$

waar $\alpha_{2,0}, ..., \alpha_{0,0} \in \mathbb{C}$ en ϕ in zekere functieruimte. Voor zekere coëfficiënten $\alpha_{2,0}, ..., \alpha_{0,0}$ is de evolutievergelijking 0.1 een Schrödinger-Diffusie-vergelijking. Ik noem de evolutievergelijking dan 'golfachtig' (als $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,1}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,1}) = 0$) of 'diffusieachtig'(als $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) \geq \delta > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq -\delta$ en $|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| \leq 2\delta - \epsilon < 2\delta$). In deze gevallen is, voor $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, existentie en éénduidigheid van de gegeneraliseerde oplossing aan te tonen met behulp van De Graafs existentie-stelling (zie voor deze stelling bijlage C). Het schatten van resolventen, wat nodig is om de Hille-Yosida Theorie toe te passen kan zo vermeden worden. Als de evolutievergelijking 'golfachtig' of 'diffusieachtig' is, dan kunnen we met deze stelling ook existentie en éénduidigheid van de oplossing aantonen voor ϕ in de ruimte der getemperde distributies $S'(\mathbb{R})$. Wanneer we, onder deze aanname, het beginwaardeprobleem schrijven als

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= \mathcal{A}u(t) \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

met $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\underline{\alpha})$, dan heet $\mathcal{A}$ een infinitesimaal-generator. We kunnen de oplossing $u(x,t)$ dan schrijven als $u(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$. Dit alles doe ik in hoofdstuk 1.

In hoofdstuk 2 beschouw ik een deelruimte **GF** van $S'(\mathbb{R})$. Deze deelruimte is gesloten onder Fourier-transformatie, differentiëren, transleren, en schalen. Ook is deze deelruimte, onder zekere voorwaarden op $\underline{\alpha}$ en t, gesloten onder $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$. Voor $\phi \in$ **GF** is dan een expliciete uitdrukking van de oplossing van het Cauchy-probleem te geven.

In bijlage E los ik het eigenwaarde-probleem voor de operator $\mathcal{A}$ op **GF** op.

Voorwoord

Dit verslag is het resultaat van mijn arbeid in de lente en de zomer van 1996, en geschreven ter afronding van mijn Wiskunde-studie aan de Technische Universiteit Eindhoven. Ik heb in die periode kennisgemaakt met de theorie van infinitesimaal-generatoren en een glimp van de 'symmetrische theorie der gegeneraliseerde functies' opgevangen. Erg mooie wiskunde, zoals de lezer spoedig zal merken.

Eenieder die mij tijdens mijn werk heeft geholpen door naar mijn enthousiaste verhalen over deze wiskunde te luisteren, wil ik daar op deze plaats hartelijk voor danken.

Voor eventuele nadere toelichting ben ik te bereiken: telefonisch: 040-2454479 en via e-mail: joostvb@win.tue.nl.

Joost van Baal, augustus 1996

Inhoudsopgave

Inleiding en preliminaria

Infinitesimaal-generatoren en de symmetrische theorie der gegeneraliseerde functies

De symmetrische theorie der gegeneraliseerde functies

In [L] presenteert J.J. Lodder ideeën over wat hij noemt de 'symmetrische theorie der gegeneraliseerde functies'. In dit boek wordt onderzocht of er een niet-triviale deelruimte van de ruimte der getemperde distributies $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ bestaat, die voorzien kan worden van een symmetrisch scalair produkt. Van dit scalair produkt wordt verlangt dat het zich, in zeker opzicht, gedraagt als een inprodukt. Verder wordt de vraag gesteld of deze deelruimte voorzien kan worden van een puntprodukt, dat een uitbreiding is van het bekende produkt $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, waar f en g zodanig dat iedere afgeleide van f en g polynomiaal begrensd is.

Deze theorie zou gebruikt kunnen worden als een alternatief voor de gangbare distributietheorie, zoals die beschreven staat in, bijvoorbeeld, [G&S], en toegepast kunnen worden in Quantum-Veld-Theorie.

In [L, Chapter 3, p. 21] introduceert Lodder een 'Trivial Model' $\mathbf{GF}_t$. $\mathbf{GF}_t$ is een deelruimte van $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, en bestaat uit eindige lineaire combinaties van de elementen x^p en $\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x)$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$. Deze ruimte is te voorzien van een scalair produkt en een puntprodukt. Deze produkten hebben gewenste eigenschappen.

De oplosbaarheid van een Cauchy-probleem, infinitesimaal-generatoren

Dit verslag gaat echter in eerste instantie niet over de symmetrische theorie, maar over de oplosbaarheid van een Cauchy-probleem. In hoofdstuk 1 onderzoek ik de oplosbaarheid van het Cauchy-probleem

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= \mathcal{A}u(t) \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

met $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ en

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\underline{\alpha}) = \alpha_{2,0}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + (\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,0})\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \alpha_{0,2}x^2 + \alpha_{0,1}x + \alpha_{0,0}\ .$$

De vraag: 'Is dit Cauchy-probleem oplosbaar?' is equivalent aan: 'Is $\mathcal{A}$ een infinitesimaal-generator?' Voor zekere coëfficiënten $\underline{\alpha}$ blijkt $\mathcal{A}$ inderdaad een infinitesimaal-generator te zijn: Als A golfachtig (diffusieachtig) is, dan is $\mathcal{A}$ de infinitesimaal-generator van een één-parameter sterk continue (semi-)groep; de operatoren $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$, $t \geq 0$ ($t \in \mathbb{R}$), met, in sterke zin,

$$\mathcal{A} = \lim_{t \downarrow 0} \tfrac{1}{t}(\mathrm{e}^{t\mathcal{A}} - \mathcal{I})\ ,$$

voldoen aan: $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ is begrensd, en

$$\mathrm{e}^{(t+s)\mathcal{A}} = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\mathrm{e}^{s\mathcal{A}}\ , \qquad \mathrm{e}^{0\mathcal{A}} = \mathcal{I}\ .$$

(Zie ook [Y, p. 231])

Het resultaat van hoofdstuk 1 is stelling 1.8, waar ik aantoon dat $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$, onder zekere voorwaarden, continu is op $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Een expliciete uitdrukkingen voor de oplossing van het Cauchy-probleem

We zijn echter ook geïnteresseerd in expliciete uitdrukkingen voor de oplossing van het Cauchy-probleem. Hiervoor gebruiken we ideeën uit de symmetrische theorie. We introduceren namelijk, in hoofdstuk 2 de ruimte $\mathbf{GF}$. Deze ruimte is een uitbreiding van Lodders ruimte $\mathbf{GF}_t$. Op de ruimte $\mathbf{GF}_t$ zijn, behalve de operatoren $\mathcal{X}$, $\mathcal{D}$ en $\mathcal{F}$, ook een scalair-, een punt-, en een convolutieprodukt gedefinieerd.

Onze ruimte $\mathbf{GF}$ is, voor zekere $\underline{\alpha}$ en t, gesloten onder $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$, en voor $\phi \in \mathbf{GF}$ is een expliciete uitdrukking voor de oplossing van het Cauchy-probleem te geven.

We zoeken zo'n uitdrukking, om de propagator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ op $\mathbf{GF}$ te kunnen beschrijven. Wanneer we er in slagen een betrekking van de vorm

$$\mathrm{e}^{t_1\mathcal{A}(\underline{\alpha}_1)}\mathrm{e}^{t_2\mathcal{A}(\underline{\alpha}_2)} \quad = \quad \mathrm{e}^{t_3\mathcal{A}(\underline{\alpha}_3)}$$

te construeren, waarbij we uitdrukkingen voor t_3 en $\underline{\alpha}_3$ in t_1, t_2 , $\underline{\alpha}_1$ en $\underline{\alpha}_2$ hebben, dan zijn we wellicht iets dichter bij een nieuwe representatie voor de Schrödinger-groep gekomen. Uiteindelijk zijn we geïnteresseerd in de vraag of het scalair produkt dat op de ruimte $\mathbf{GF}_t$ gedefinieerd is, zo uitgebreid kan worden tot de ruimte $\mathbf{GF}$, dat $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ 'unitair' is.

Preliminaria

Ruimten

Met $\mathbb{N}$ bedoelen we de verzameling natuurlijke getallen $\{0, 1, 2, ...\}$. We schrijven, voor alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ voor de Lebesgue-ruimte op $\mathbb{R}^n$: $L_2(\mathbb{R}^n) := L_2(\mathbb{R}^n)/N(\mathbb{R}^n)$, met $L_2(\mathbb{R}^n)$ de ruimte der meetbare functies $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ waarvoor geldt $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$; en $N(\mathbb{R}^n)$ de ruimte van functies $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ waarvoor geldt $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$.

We schrijven $C^n(\mathbb{R})$ ($C^\infty(\mathbb{R})$) voor de vectorruimte van n keer (willekeurig vaak) continu differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ schrijven we $W_2^n(\mathbb{R})$ voor de Sobolev-ruimte van orde n: $f \in W_2^n(\mathbb{R})$ betekent $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ is absoluut continu en $f^{(n)} \in L_2(\mathbb{R})$.

We schrijven verder $S(\mathbb{R})$ voor de Schwartz-ruimte van snel afnemende complexwaardige willekeurig vaak differentieerbare functies: $f \in S(\mathbb{R})$ betekent $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ en

$$\forall_{n,p\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^p |\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)| < \infty \, .$$

We schrijven $S'(\mathbb{R})$ voor de vectorruimte der getemperde distributies: continue lineaire functionalen op $S(\mathbb{R})$. (Zie ook bijlage D)

Operatoren

We schrijven $\mathcal{F}$ voor de Fourier-operator op $L_2(\mathbb{R})$:

$$(\mathcal{F}f)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixy} f(x) \mathrm{d}x \, ,$$

$f \in L_2(\mathbb{R})$. Verder, voor alle $f \in W_2^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{D}f := \partial f \, ,$$

waarbij ∂f staat voor de gegeneraliseerde afgeleide van zekere absoluut continue f. Voor alle $f \in \mathcal{F}W_2^1(\mathbb{R})$ definiëren we

$$\mathcal{X}f(x) := xf(x) \, .$$

Hoofdstuk 1

De evolutievergelijking in de ruimte der getemperde distributies

Inleiding

In dit hoofdstuk bewijzen we de unieke oplosbaarheid van het Cauchy-probleem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \alpha_{2,0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + (\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,0})\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \\ &\quad + \alpha_{0,2}x^2u(x,t) + \alpha_{0,1}xu(x,t) + \alpha_{0,0}u(x,t) \\ u(x,0) &= \phi(x) \end{aligned}$$

waar $(\alpha_{2,0}, ..., \alpha_{0,0})$ in zekere deelverzameling van $\mathbb{C}^6$ en $\phi \in S'(\mathbb{R})$.

In paragraaf 1.1 introduceren we de differentiaal-operator $\mathcal{A}$, die in het rechterlid van de evolutievergelijking staat, en de bij $\mathcal{A}$ passende hulp-operator $\mathcal{Q}$. In paragraaf 1.2 introduceren we een schaar van Hilbert-ruimten, waarop de matrix-representaties A en Q van de operatoren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{Q}$ gedefinieerd zijn. In paragraaf 1.3 tonen we, met behulp van het criterium van de Graafs existentie-stelling (zie bijlage C), aan dat de operator A een infinitesimaal-generator is op alle ruimten h_k, waarbij Q als hulp-operator optreedt. In paragraaf 1.4 laten we zien dat de in bijlage D ingevoerde rijtjesruimte s' te schrijven is als de inductieve limiet van de ruimten h_k. Met het 'N-representatie theorema voor $S'(\mathbb{R})$' (zie bijlage D), volgt dat s' de ruimte $S'(\mathbb{R})$ representeert. Met dit alles volgt, in paragraaf 1.4.4, existentie en éénduidigheid van de gegeneraliseerde oplossing.

1.1 De operator $\mathcal{A}$ en de hulp-operator $\mathcal{Q}$

1.1.1 De operator $\mathcal{A}$

Definitie 1.1 Voor alle $u \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$, en voor alle

$$\underline{\alpha} := (\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \in \mathbb{C}^6$$

schrijven we

$$\mathcal{A}(\underline{\alpha})u := (\alpha_{2,0}\mathcal{D}^2 + (\alpha_{1,1}\mathcal{X} + \alpha_{1,0})\mathcal{D} + \alpha_{0,2}\mathcal{X}^2 + \alpha_{0,1}\mathcal{X} + \alpha_{0,0})u\,.$$

□

Zij $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^6$.

Lemma 1.1 *$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\underline{\alpha})$, met $D(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$, is een dicht gedefinieerde operator in $L_2(\mathbb{R})$.*
Bewijs Er geldt $W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$. Verder, $D(\mathcal{D}^2) = W_2^2(\mathbb{R})$, want $u \in W_2^2(\mathbb{R})$ betekent $\breve{|}_{x\in\mathbb{R}}\partial^2 u(x) \in L_2(\mathbb{R})$ en $D(\mathcal{X}^2) = \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$, want $u \in \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$ betekent $\breve{|}_{x\in\mathbb{R}}x^2u(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Beschouw $\mathcal{X}\mathcal{D}$. Als $u \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$, dan geldt

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{X}\mathcal{D}u|^2 \mathrm{d}x \\
\leq\ & 2\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}u\overline{\mathcal{D}u}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}^2u\overline{\mathcal{D}^2u}\mathrm{d}x\right| \\
\leq\ & 2\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{X}u|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{D}u|^2\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{X}^2u|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{D}^2u|^2\mathrm{d}x} \\
<\ & \infty\,,
\end{aligned}
$$

i.e. $\mathcal{X}\mathcal{D}u \in L_2(\mathbb{R})$. Verder geldt: $D(\mathcal{D})$ en $D(\mathcal{X})$ zijn beide bevat in $W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$. We vinden: als $u \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$, dan $\mathcal{A}u \in L_2(\mathbb{R})$.

De deelruimte $W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$ ligt dicht in $L_2(\mathbb{R})$. □

Eenvoudig is in te zien:

Lemma 1.2 *De geadjungeerde van $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, wordt gegeven door de afsluiting van*

$$\overline{\alpha_{2,0}}\mathcal{D}^2 - \overline{\alpha_{1,1}}\mathcal{X}\mathcal{D} - \overline{\alpha_{1,0}}\mathcal{D} + \overline{\alpha_{0,2}}\mathcal{X}^2 + \overline{\alpha_{0,1}}\mathcal{X} + \overline{\alpha_{0,0}} - \overline{\alpha_{1,1}}\,.$$

Er geldt: $D(\mathcal{A}^*) \supset W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$. □

1.1.2 De operator $\mathcal{Q}$

We introduceren $\mathcal{Q}$ en vatten de resultaten uit bijlage B samen.

Definitie 1.2 We schrijven voor alle $f \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{Q}f = (\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2 + 1)f\,.$$

□

Er geldt $\mathcal{Q} = \mathcal{A}(-1,0,0,1,0,1)$. Dus met lemma 1.1 volgt

Lemma 1.3 *$\mathcal{Q}$, met $D(\mathcal{Q}) = W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$, is een operator in $L_2(\mathbb{R})$.* □

We schrijven, voor $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{erfc}x := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\,.$$

Stelling 1.1 *De operator $\mathcal{Q}$ is inverteerbaar; de inverse $\mathcal{Q}^{-1}$, met $D(\mathcal{Q}^{-1}) = L_2(\mathbb{R})$, wordt gegeven door: voor alle $f \in L_2(\mathbb{R})$*

$$(\mathcal{Q}^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)f(y)\mathrm{d}y\,.$$

met, voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$G(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(-x)\,\mathrm{erfc}y & \text{als } x < y \\ \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}x\,\mathrm{erfc}(-y) & \text{als } x \geq y\,. \end{cases}$$

De operator $\mathcal{Q}^{-1}$ is een begrensde operator op $L_2(\mathbb{R})$.
Bewijs Zie de stellingen B.2 en B.4 uit bijlage A. □

Stelling 1.2 *De operator $\mathcal{Q}$ is een dicht gedefinieerde, strict positieve, inverteerbare operator in $L_2(\mathbb{R})$, met $D(\mathcal{Q}^{-1}) = L_2(\mathbb{R})$ en $D(\mathcal{Q}) \subset D(\mathcal{A})$.*
Bewijs De bewering volgt met lemma 1.3 en de stellingen B.4 en B.5 uit bijlage A. □

1.1.3 De Hermite-basis van $L_2(\mathbb{R})$ en de matrix-representatie van de operator $\mathcal{A}$

Volgens bijlage A geldt voor de Hermite-polynomen

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} ,$$

met $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$. We schrijven, c.f. bijlage A,

$$\psi_n(x) := (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) .$$

Het theorema [T, p. 79, Th. 55] geeft nu:

Stelling 1.3 *De rij $\{\psi_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ vormt een orthonormale basis in $L_2(\mathbb{R})$.* □

Definitie 1.3 We schrijven, voor alle $u \in L_2(\mathbb{R})$,

$$(Uu)_n := (u, \psi_n) ,$$

met $n \in \mathbb{N}$. De aldus gedefiniëerde operator U is een unitaire operator $U : L_2(\mathbb{R}) \to l_2$. □

Met stelling 1.3 volgt dat de ruimten $L_2(\mathbb{R})$ en l_2 isomorf zijn. De operator U beschrijft dit isomorfisme. We schrijven voor alle $u \in L_2(\mathbb{R})$

$$u_n = (Uu)_n .$$

Er geldt

$$(\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2)\psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x) , \tag{1.1}$$

(zie [T, p. 77, (3.5.4)]) en dus

$$\mathcal{Q}\psi_n = 2(n+1)\psi_n . \tag{1.2}$$

Overigens: Hiermee volgt een relatie tussen $G(x,y)$ en ψ_n. Immers,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2(j+1)}\psi_j(x) &= \mathcal{Q}^{-1}\psi_j(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)\psi_j(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

en dus, omdat $\{\psi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ een orthonormale basis vormt,

$$G(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{2(j+1)} \psi_j(x)\psi_j(y) .$$

We geven de elementen $a_{n,m} = (\psi_n, \mathcal{A}\psi_m)$ van de matrix-representatie van de operator $A = U\mathcal{A}U^{-1}$.

Stelling 1.4 *Er geldt, voor $(n,m) \in \mathbb{N}^2$,*

$$a_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{m}\sqrt{m-1}(\alpha_{2,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2}) & (n = m-2) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2m}(\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1}) & (n = m-1) \\ (m + \frac{1}{2})(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) - \frac{1}{2}\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} & (n = m) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2m+2}(-\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1}) & (n = m+1) \\ \frac{1}{2}\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}(\alpha_{2,0} - \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2}) & (n = m+2) \\ 0 & (\textit{anders,}) \end{cases}$$

of, in matrix-notatie,

$$
\begin{aligned}
A \quad = \quad & (-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}+\alpha_{0,0}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & \dots & 0 & 1 & \dots & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}(-\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 3 & 0 & \dots & & \\ \dots & 0 & 5 & 0 & \dots & \\ & \dots & 0 & 7 & \dots & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\alpha_{1,0} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \dots & & \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -\sqrt{3} & \dots & \sqrt{4} & \dots \\ & \dots & 0 & -\sqrt{4} & & \dots \\ & & & \dots & \dots & \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\alpha_{0,1} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \dots & & \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \sqrt{3} & \dots & \sqrt{4} & \dots \\ & \dots & 0 & \sqrt{4} & & \dots \\ & & & \dots & \dots & \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1}\sqrt{2} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & \dots \\ -\sqrt{1}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\sqrt{4} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & & \\ & & \dots & \dots & & \end{pmatrix} . \\
& + \tfrac{1}{2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1}\sqrt{2} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \sqrt{1}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & & \\ & & \dots & \dots & & \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Bewijs We beschouwen de creatie-operator $\mathcal{X}-\mathcal{D}$ en de annihilatie-operator $\mathcal{X}+\mathcal{D}$ en berekenen $(\mathcal{X}-\mathcal{D})\psi_n$ en $(\mathcal{X}+\mathcal{D})\psi_n$. We definiëren $\psi_{-1} := 0$. Er geldt, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}\psi_n \quad = \quad \mathcal{X}\psi_n - \sqrt{2n+2}\psi_{n+1} \,. \tag{1.3}$$

Nu geldt (zie [A&S, (22.7.13), p. 782]), voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) \quad = \quad 0 \,.$$

Voor de functies ψ_n betekent dit

$$\sqrt{2n+2}\psi_{n+1} - 2\mathcal{X}\psi_n + \sqrt{2n}\psi_{n-1} = 0 \,,$$

zodat we met 1.3 vinden

$$\mathcal{D}\psi_n \quad = \quad -\mathcal{X}\psi_n + \sqrt{2n}\psi_{n-1} \,.$$

We concluderen: voor $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$(\mathcal{X} - \mathcal{D})\psi_n = \sqrt{2n+2}\psi_{n+1} , \tag{1.4}$$

$$(\mathcal{X} + \mathcal{D})\psi_n = \sqrt{2n}\psi_{n-1} . \tag{1.5}$$

Met dit stelsel vinden we, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{X}\psi_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{2n}\psi_{n-1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2n+2}\psi_{n+1} , \tag{1.6}$$

$$\mathcal{X}^2\psi_0 = \tfrac{1}{2}\psi_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\psi_2 , \tag{1.7}$$

$$\mathcal{X}^2\psi_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{n-1}\psi_{n-2} + (n+\tfrac{1}{2})\psi_n + \tfrac{1}{2}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\psi_{n+2} , \qquad (n \geq 1) \tag{1.8}$$

$$\mathcal{D}\psi_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{2n}\psi_{n-1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2n+2}\psi_{n+1} , \tag{1.9}$$

$$\mathcal{D}^2\psi_0 = -\tfrac{1}{2}\psi_0 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\psi_2 , \tag{1.10}$$

$$\mathcal{D}^2\psi_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{n-1}\psi_{n-2} - (n+\tfrac{1}{2})\psi_n + \tfrac{1}{2}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\psi_{n+2} , \qquad (n \geq 1) \tag{1.11}$$

$$\mathcal{X}\mathcal{D}\psi_0 = \tfrac{1}{2}\psi_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\psi_2 , \tag{1.12}$$

$$\mathcal{X}\mathcal{D}\psi_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{n-1}\psi_{n-2} - \tfrac{1}{2}\psi_n - \tfrac{1}{2}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\psi_{n+2} . \qquad (n \geq 1) \tag{1.13}$$

Immers: De vergelijkingen 1.6 en 1.9 volgen uit het stelsel 1.4, 1.5. De vergelijkingen 1.8 en 1.11 volgen direct uit 1.6 en 1.9 respectievelijk, en zijn in overeenstemming met vergelijking 1.1. Vergelijking 1.13, als laatste volgt met 1.6 en 1.9. Met dit laatste stelsel kunnen we $\mathcal{A}\psi_n$ berekenen: Er geldt, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\psi_0 &= (\tfrac{1}{2}(-\alpha_{2,0} - \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2}) + \alpha_{0,0})\psi_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(-\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1})\psi_1 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\alpha_{2,0} - \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2})\psi_2 . \\
\mathcal{A}\psi_n &= \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{n-1}(\alpha_{2,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2})\psi_{n-2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2n}(\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1})\psi_{n-1} \\
&\quad + ((n+\tfrac{1}{2})(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0})\psi_n \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2n+2}(-\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1})\psi_{n+1} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}(\alpha_{2,0} - \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2})\psi_{n+2} \qquad (n \geq 1) .
\end{aligned}$$

Dit geeft de gevraagde uitdrukking voor de elementen $a_{n,m}$. □

1.2 De operator $\mathcal{Q}^k$ en de Hilbert-ruimten h_k

Definitie 1.4 We definiëren, voor alle $n \in \mathbb{N}$, de operator $\mathcal{Q}^n$ in $L_2(\mathbb{R})$ door

$$\mathcal{Q}^n\psi_j = 2^n(j+1)^n\psi_j ,$$

i.e.

$$U\mathcal{Q}^nU^{-1} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 2^n & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 3^n & 0 & \dots \\ & \dots & 0 & 4^n & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} ,$$

met $D(\mathcal{Q}^n) = \{v \in L_2(\mathbb{R}) | ((j+1)^n v_j)_{j=0}^{\infty} \in l_2\}$. De operator $\mathcal{Q}^n$ is een operator in $L_2(\mathbb{R})$. □

Definitie 1.5 We definiëren, voor alle $n \in \mathbb{N}$, de operator $\mathcal{Q}^{-n}$ door

$$\mathcal{Q}^{-n}\psi_j = 2^{-n}(j+1)^{-n}\psi_j ,$$

i.e.

$$U\mathcal{Q}^{-n}U^{-1} = 2^{-n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & \frac{1}{3^n} & 0 & \dots \\ & \dots & 0 & \frac{1}{4^n} & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} ,$$

met $D(\mathcal{Q}^{-n}) = L_2(\mathbb{R})$. We schrijven $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ voor de vectorruimte van alle rijtjes complexe getallen. Omdat $\{\underline{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | (\frac{v_j}{(j+1)^n})_{j=0}^{\infty} \in l_2\} \supset l_2$, is de operator $\mathcal{Q}^{-n}$ een operator op $L_2(\mathbb{R})$. □

Deze definities zijn zinvol; voor alle $k, l \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\mathcal{Q}^k \mathcal{Q}^l = \mathcal{Q}^{k+l} .$$

Lemma 1.4 *Beschouw l_2 als een deelruimte van de vectorruimte $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. De operatoren $U\mathcal{A}U^{-1}$ en $U\mathcal{Q}^k U^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, zijn uit te breiden tot operatoren op $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. We geven deze uitbreidingen aan met* A *en* Q^k. *De operator Q^k beeldt nu $\{\underline{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | ((j+1)^k v_j)_{j=0}^{\infty} \in l_2\}$ af op l_2, i.e.*

$$(\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2) = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | ((j+1)^k v_j)_{j=0}^{\infty} \in l_2\} .$$

Bewijs Eenvoudig in te zien: Immers, $U\mathcal{A}U^{-1}$ en $U\mathcal{Q}^k U^{-1}$ zijn voor te stellen door n-diagonaalse matrices, met n eindig. □

Ter illustratie dit schema: voor $k \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2) \arrow[d, "\mathrm{Q}^k"] & \subset & l_2 \\
l_2 & \subset & (\mathrm{Q}^{-k})^{\leftarrow}(l_2) \arrow[u, "\mathrm{Q}^{-k}"']
\end{tikzcd}$$

Zij nu $k \in \mathbb{Z}$.

Definitie 1.6 We definiëren de sesquilineaire vorm $(\cdot,\cdot)_k$ op $(\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2) \times (\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2)$ door

$$(u, v)_k \quad := \quad (\mathrm{Q}^k u, \mathrm{Q}^k v)_{l_2} ,$$

met $u, v \in (\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2)$, en waar $(\cdot,\cdot)_{l_2}$ staat voor het inprodukt op l_2. Met de inverteerbaarheid van Q^k is eenvoudig in te zien dat deze sesquilineaire vorm een inprodukt is. □

Definitie 1.7 We definiëren de inprodukt-ruimte h_k door

$$h_k := ((\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2), (\cdot,\cdot)_k) .$$

□

Bedenk dat $h_0 = l_2$ en dat $h_{k+1} \subset h_k$. Er geldt, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n \subset l_2 \subset h_{-n} .$$

Zo'n drietal heet een *Gelfand-tripel.*

Lemma 1.5 *De rij $\underline{u}_j$ in h_k is convergent in h_k-zin, met limiet* 0, *dan en slechts dan als voor alle $l \in \mathbb{N}$ $(\underline{u}_j)_l \to 0$*
Bewijs 'dan als' Flauw.
'slechts dan als' Zij de rij $(\underline{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergent in h_k met limiet 0. I.e. $\|\underline{u}_j\|_k^2 = 2^{2k} \sum_l l^{2k} (\underline{u}_j)_l^2 \to 0$ $(j \to \infty)$. We zien dat dan geldt, voor alle $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{j\to\infty} (\underline{u}_j)_l = 0$. □

Stelling 1.5 *De inproduktruimte h_k is een Hilbert-ruimte.*
Bewijs Zij de rij $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in h_k. Dan is $(\mathrm{Q}^k u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in l_2, en dus convergent met limiet zeg $f \in l_2$. Er is dus een $u \in (\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2)$, zeg u, zodanig dat $\mathrm{Q}^k u = f$. Dan $\|u_j - u\|_k = \|\mathrm{Q}^k u_j - f\| \to 0$. We concluderen: h_k is een Hilbertruimte. □

1.3 De operator A als infinitesimaal-generator op de Hilbert-ruimten h_k

Inleiding

In deze paragraaf voeren we de operatoren $\mathrm{A}_k(\underline{\alpha})$ in en bewijzen we dat, onder zekere voorwaarden op $\underline{\alpha}$, de afsluiting $\overline{\mathrm{A}}_k$ een infinitesimaal-generator is. De operator A_k zal dicht gedefinieerd zijn in de Hilbert-ruimte h_k. Wanneer we, om te bewijzen dat $\overline{\mathrm{A}}_k$ een infinitesimaal-generator is, gebruik maken van de Hille-Yosida Theorie, moeten we bewijzen dat de resolvente $(\mathrm{I}-n^{-1}\mathrm{A}_k)^{-1}$ bestaat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, en dat er een $C > 0$ is zodat voor alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$ geldt $\|(\mathrm{I}-n^{-1}\mathrm{A}_k)^{-m}\| \leq C$. (Zie [Y, Theorem, p. 246, en Corollary 1, p. 248].) Deze voorwaarde is nodig en voldoende, en dus ook erg moeilijk te verifiëren.

Een hanteerbare voldoende voorwaarde wordt geleverd door de existentie-stelling. We bewijzen dat, onder zekere voorwaarden op de coëfficiënten $\underline{\alpha}$, A_k aan de criteria voor deze existentie-stelling voldoet, en dus dat $\overline{\mathrm{A}}_k$ een infinitesimaal-generator is.

1.3.1 De eerste criteria voor de existentie-stelling

Zij $k \in \mathbb{Z}$.

Definitie 1.8 We definiëren de operatoren $\mathrm{A}_k = \mathrm{A}_k(\underline{\alpha})$ en Q_k, met $D(\mathrm{A}_k(\underline{\alpha})) = D(\mathrm{Q}_k) = (\mathrm{Q}^{k+1})^{\leftarrow}(l_2)$, terwijl verder, voor alle $v \in D(\mathrm{Q}_k)$, $\mathrm{A}_k v = \mathrm{A}v$ en $\mathrm{Q}_k v = \mathrm{Q}v$. De operatoren A_k en Q_k zijn operatoren in h_k. □

Lemma 1.6 *Er geldt: Q_k is een dicht gedefinieerde, strict positieve, inverteerbare operator in h_k, en $D(\mathrm{Q}_k^{-1}) = h_k$.*
Bewijs Er geldt: Q_k is dicht gedefinieerd. Immers: Zij $\epsilon > 0$ en zij $\underline{u} \in h_k = (\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2)$. Dan $\mathrm{Q}^k\underline{u} \in l_2$. Omdat, volgens stelling 1.2, $D(\mathcal{Q})$ dicht ligt in $L_2(\mathbb{R})$, is er nu een $\underline{f} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$, zeg $\underline{f}$, zodanig dat $\|\mathrm{Q}^k\underline{u} - \underline{f}\| < \epsilon$. Er is nu een $v \in (\mathrm{Q}^{k+1})^{\leftarrow}(l_2) = D(\mathrm{Q}_k)$, zeg v, zodanig dat $\underline{f} = \mathrm{Q}^k v$. Er geldt:

$$\|\underline{u} - v\|_k = \|\mathrm{Q}^k\underline{u} - \underline{f}\| < \epsilon\,.$$

We bewijzen dat Q_k strict positief is. Omdat $\mathcal{Q}$ zelfgeadjungeerd is, geldt voor alle $\underline{v} \in D(\mathrm{Q}_k)$, en alléén voor $\underline{v} \in D(\mathrm{Q}_k)$, dat

$$\begin{aligned}(\mathrm{Q}_k\underline{u}, \underline{v})_k &= (\mathrm{Q}\mathrm{Q}^k\underline{u}, \mathrm{Q}^k\underline{v})_{l_2}\\ &= (\underline{u}, \mathrm{Q}_k\underline{v})_k\end{aligned}$$

voor alle $\underline{u} \in D(\mathrm{Q}_k)$. Dus Q_k is zelfgeadjungeerd. Zij nu $\underline{u} \in D(\mathrm{Q}_k)$, $\underline{u} \neq 0$. Dan

$$\begin{aligned}(\underline{u}, \mathrm{Q}_k\underline{u})_k &= (\mathrm{Q}^k\underline{u}, \mathrm{Q}^{k+1}\underline{u})\\ &= 2^{2k+1}\sum_{j=0}^{\infty} j^{2k+1}|u_j|^2\\ &> 0\,.\end{aligned}$$

Als laatste: De operator $\mathcal{Q}$ is volgens stelling 1.2 inverteerbaar op $\mathcal{Q}^{\leftarrow}(L_2(\mathbb{R}))$, met $D(\mathcal{Q}^{-1}) = L_2(\mathbb{R})$, dus ook Q_k is inverteerbaar, met $D(\mathrm{Q}_k^{-1}) = h_k$. □

Lemma 1.7 *De operator A_k is afsluitbaar.*
Bewijs Zij de rij $(\underline{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergent in h_k met limiet 0. Dan geldt, met lemma 1.5, voor alle $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{j\to\infty}(\underline{u}_j)_l = 0$. Zij nu ook de rij $(\mathrm{A}_k\underline{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergent in h_k. We beschouwen $(\lim_{j\to\infty}\mathrm{A}\underline{u}_j)_l$.

Er geldt, voor $l \geq 1$

$$\begin{aligned}
&(\lim_{j\to\infty} \mathrm{A}\underline{u}_j)_l \\
&= \lim_{j\to\infty} (\mathrm{A}\underline{u}_j)_l \\
&= \lim_{j\to\infty} \{\tfrac{1}{2}\sqrt{l}\sqrt{l-1}(\alpha_{2,0}-\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2})(\underline{u}_j)_{l-2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2l}(-\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1})(\underline{u}_j)_{l-1} \\
&\qquad + ((l+\tfrac{1}{2})(-\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2}) - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}+\alpha_{0,0})(\underline{u}_j)_l \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{l+1}(\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1})(\underline{u}_j)_{l+1} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sqrt{l+1}\sqrt{l+2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2})(\underline{u}_j)_{l+2}\} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{l}\sqrt{l-1}(\alpha_{2,0}-\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2})\lim_{j\to\infty}(\underline{u}_j)_{l-2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2l}(-\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1})\lim_{j\to\infty}(\underline{u}_j)_{l-1} \\
&\qquad + ((l+\tfrac{1}{2})(-\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2}) - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}+\alpha_{0,0})\lim_{j\to\infty}(\underline{u}_j)_l \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{l+1}(\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1})\lim_{j\to\infty}(\underline{u}_j)_{l+1} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sqrt{l+1}\sqrt{l+2}(\alpha_{2,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2})\lim_{j\to\infty}(\underline{u}_j)_{l+2} \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

terwijl op dezelfde manier aan valt te tonen dat ook

$$(\lim_{j\to\infty} \mathrm{A}\underline{u}_j)_0 = 0\,.$$

Met lemma 1.5 volgt hieruit $\lim_{j\to\infty} \mathrm{A}_k\underline{u}_j = 0$ in h_k-zin. We concluderen: A_k is afsluitbaar. □

De operator A_k is dicht gedefinieerd, dus met bovenstaand lemma en [W, Theorem 5.3, p. 90] volgt nu:

Lemma 1.8 *De deelruimte $D(\mathrm{A}_k^*)$ ligt dicht in h_k.* □

1.3.2 Golf- en diffusieachtige operatoren, twee afschattingen

Golf- en diffusieachtige operatoren

Definitie 1.9 We noemen de operator $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ *golfachtig* als

$$\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,1}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,1}) = 0\,.$$

We noemen de operator $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ *diffusieachtig* als

$$\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) \geq \delta > 0 \quad , \quad \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq -\delta \quad \text{en} \quad |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| \leq 2\delta - \epsilon < 2\delta\,.$$

□

Met lemma 1.2 is eenvoudig in te zien:

Lemma 1.9 *Als* A *golfachtig is, dan zijn ook* A^* *en* $-\mathrm{A}$ *golfachtig, en als* A *diffusieachtig is, dan is ook* A^* *diffusieachtig.* □

De termen 'golfachtig' en 'diffusieachtig' vereisen enige nadere toelichting.

Het volgende over de term 'golfachtig'. Bedenk dat geldt: $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$ is scheef-geadjungeerd, i.e. $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, dan en slechts dan als $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ golfachtig is en $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1}) = 2\mathrm{Re}(\alpha_{0,0})$. Als dus $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ golfachtig is, met $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1}) = 2\mathrm{Re}(\alpha_{0,0})$, dan is de evolutievergelijking een Schrödinger-vergelijking. Als $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$ in dit geval een eigenwaarde $i\omega$ heeft, dan is ω zuiver reëel. Voor $\phi \in N(\mathcal{A} - i\omega\mathcal{I})$ geldt dan dat het Cauchy-probleem

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \mathcal{A}u \\
u(0) &= \phi
\end{aligned}$$

de oplossing $u(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}\phi$ heeft. Blijkbaar heeft het Cauchy-probleem dan oplossingen die periodiek zijn in t. (Zie ook bijlage E.)

Over de term 'diffusieachtig' merk ik het volgende op. Als alle coëfficiënten $\alpha_{i,j}$ zuiver reëel zijn, met $\alpha_{2,0} > 0$ en $\alpha_{0,2} < 0$, en A dus diffusieachtig is, dan is de evolutievergelijking een diffusievergelijking met een storing die dissipatie- en convectie-verschijnselen beschrijft. Voor het hoofddeel $\mathcal{A}_h = \alpha_{2,0}\mathcal{D}^2 + \alpha_{1,1}\mathcal{X}\mathcal{D} + \alpha_{0,2}\mathcal{X}^2$ geldt dan immers $\mathcal{A}_h^* = \mathcal{A}_h$ en $\mathcal{A}_h \leq 0$: $\mathcal{A}_h$ is negatief definiet. De voorwaarde 'diffusieachtig' is dus, zoals deze term al suggereert, zwakker dan 'diffusie-'.

We zullen zien dat, als A golfachtig is, $\overline{\mathrm{A}_k}$ een infinitesimaal-generator is. In het speciale geval dat $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1}) = 2\mathrm{Re}(\alpha_{0,0})$, volgt dit resultaat ook met de stelling van Stone. (Zie [W, Theorem 7.37, p. 220].) Immers, $i\mathrm{A}_k$ is dan zelf-geadjungeerd.

De matrix-representatie van $\mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}$, twee afschattingen

Zij vanaf nu $\underline{\alpha}$ zodanig dat de operator $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ golfachtig of diffusieachtig is. We bepalen de matrix-representatie van $\mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}$.

Lemma 1.10 *Er geldt, voor alle $k \in \mathbb{Z}$,*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k} \\
=\ & (-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & & \\ \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ & \ldots & 0 & 1 & \ldots & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & \\ 0 & 3 & 0 & \ldots & & \\ \ldots & 0 & 5 & 0 & \ldots & \\ & \ldots & 0 & 7 & \ldots & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\alpha_{1,0} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}(\frac{1}{2})^k & 0 & \ldots & & \\ -\sqrt{1}2^k & 0 & \sqrt{2}(\frac{2}{3})^k & 0 & \ldots & \\ 0 & -\sqrt{2}(\frac{3}{2})^k & 0 & \sqrt{3}(\frac{3}{4})^k & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & -\sqrt{3}(\frac{4}{3})^k & \ldots & \sqrt{4}(\frac{4}{5})^k & \ldots \\ & \ldots & 0 & -\sqrt{4}(\frac{5}{4})^k & & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\alpha_{0,1} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}(\frac{1}{2})^k & 0 & \ldots & & \\ \sqrt{1}2^k & 0 & \sqrt{2}(\frac{2}{3})^k & 0 & \ldots & \\ 0 & \sqrt{2}(\frac{3}{2})^k & 0 & \sqrt{3}(\frac{3}{4})^k & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & \sqrt{3}(\frac{4}{3})^k & \ldots & \sqrt{4}(\frac{4}{5})^k & \ldots \\ & \ldots & 0 & \sqrt{4}(\frac{5}{4})^k & & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1}\sqrt{2}(\frac{1}{3})^k & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\sqrt{3}(\frac{2}{4})^k & 0 & \ldots \\ -\sqrt{1}\sqrt{2}3^k & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\sqrt{4}(\frac{3}{5})^k & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\sqrt{3}(\frac{4}{2})^k & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & & \\ & & \ldots & \ldots & & \end{pmatrix} \\
& + \tfrac{1}{2}(\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) \\
& \quad \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1}\sqrt{2}(\frac{1}{3})^k & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\sqrt{3}(\frac{2}{4})^k & 0 & \ldots \\ \sqrt{1}\sqrt{2}3^k & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\sqrt{4}(\frac{3}{5})^k & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\sqrt{3}(\frac{4}{2})^k & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & & \\ & & \ldots & \ldots & & \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Bewijs Er geldt:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}^k \mathcal{A} \mathcal{Q}^{-k} \psi_0 \\
=\ & (\tfrac{1}{2}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0})\psi_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}2^k(-\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1})\psi_1 \\
& \quad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}3^k(\alpha_{2,0} - \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2})\psi_2 \ ,
\end{aligned}
$$

en, voor $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}^k \mathcal{A} \mathcal{Q}^{-k} \psi_n \\
=\ & \tfrac{1}{2}\sqrt{n}(n-1)^{k+\frac{1}{2}}(n+1)^{-k}(\alpha_{2,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2})\psi_{n-2} \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}n^{k+\frac{1}{2}}(n+1)^{-k}(\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1})\psi_{n-1} \\
& + ((n+\tfrac{1}{2})(-\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2}) - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}+\alpha_{0,0})\psi_n \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(n+1)^{\frac{1}{2}-k}(n+2)^k(-\alpha_{1,0}+\alpha_{0,1})\psi_{n+1} \\
& + \tfrac{1}{2}(n+1)^{\frac{1}{2}-k}\sqrt{n+2}(n+3)^k(\alpha_{2,0}-\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2})\psi_{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Dit geeft de matrix. □

We schatten $\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v})$ tegen $(\underline{v},\underline{v})$ en $\mathrm{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v})$ tegen $(\mathrm{Q}\underline{v},\underline{v})$. Daarbij maken we gebruik van het volgende trucje: Als $(\cdot,\cdot)$ een inprodukt is, dan geldt voor alle u, v en voor alle $\lambda > 0$:

$$2|\mathrm{Re}(u,v)| \quad \leq \quad \lambda^2\|u\|^2 + \tfrac{1}{\lambda^2}\|v\|^2\,.$$

(Immers, $\|\lambda u - \frac{1}{\lambda}v\|^2 \geq 0$.)

Lemma 1.11 *Er geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$: Er is een $b \geq 0$ zodanig dat voor alle $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$:*

$$\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \leq b(\underline{v},\underline{v})\,.$$

Bewijs Er geldt, voor $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2) \subset l_2$: $\mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v} \in l_2$, dus de uitdrukking in het lemma is zinvol.

Zij nu $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$. Met de matrix-representatie uit lemma 1.10 vinden we:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
=\ & \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \overline{(\mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v})_n}) \\
=\ & \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{(\mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k})_{n,m}\overline{v_m}}) \\
=\ & \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n}(n+1)^k}{(n-1)^{k-\frac{1}{2}}} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}} - \overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,2}})\overline{v_{n-2}}v_n] \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(n+1)^k}{n^{k-\frac{1}{2}}} \mathrm{Re}[(\overline{-\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}})\overline{v_{n-1}}v_n] \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}[((n+\tfrac{1}{2})(-\overline{\alpha_{2,0}} + \overline{\alpha_{0,2}}) - \tfrac{1}{2}\overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,0}})\overline{v_n}v_n] \\
& + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(n+1)^{k+\frac{1}{2}}}{(n+2)^k} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}})v_n\overline{v_{n+1}}] \\
& + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+2}(n+1)^{k+\frac{1}{2}}}{(n+3)^k} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}} + \overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,2}})v_n\overline{v_{n+2}}] \\
=\ & S_1 + S_2 + S_3\,,
\end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+2}(n+3)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}}-\overline{\alpha_{1,1}}+\overline{\alpha_{0,2}})\overline{v_n}v_{n+2}] \\
&\qquad + \tfrac{\sqrt{n+2}(n+1)^{k+\frac{1}{2}}}{(n+3)^k}\mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}}+\overline{\alpha_{1,1}}+\overline{\alpha_{0,2}})v_n\overline{v_{n+2}}] \\
S_2 &:= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\{\tfrac{(n+2)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\mathrm{Re}[(-\overline{\alpha_{1,0}}+\overline{\alpha_{0,1}})\overline{v_n}v_{n+1}] \\
&\qquad + \tfrac{(n+1)^{k+\frac{1}{2}}}{(n+2)^k}\mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{1,0}}+\overline{\alpha_{0,1}})v_n\overline{v_{n+1}}]\} \\
S_3 &:= \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}[((n+\tfrac{1}{2})(-\overline{\alpha_{2,0}}+\overline{\alpha_{0,2}})-\tfrac{1}{2}\overline{\alpha_{1,1}}+\overline{\alpha_{0,0}})\overline{v_n}v_n]\,.
\end{aligned}$$

We schatten S_1. Bedenk dat, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sqrt{n+2}(n+1)^{k+\frac{1}{2}}}{(n+3)^k} \quad = \quad \frac{\sqrt{n+2}(n+3)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}+\sqrt{n+2}\frac{(n+1)^{2k}-(n+3)^{2k}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+3)^k}\,,$$

terwijl, voor zekere $C_1 > 0$, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$|\sqrt{n+2}\frac{(n+1)^{2k}-(n+3)^{2k}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+3)^k}| \le C_1\,,$$

immers, de functie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \sqrt{x+2}\frac{(x+1)^{2k}-(x+3)^{2k}}{(x+1)^{k-\frac{1}{2}}(x+3)^k}$$

is continu, en, voor $x \to \infty$

$$f(x) = -4k + O(x^{-1})\,.$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned}
S_1 &\le \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\sqrt{n+2}(n+3)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\{\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})\mathrm{Re}(v_n\overline{v_{n+2}})+\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})\mathrm{Im}(v_n\overline{v_{n+2}})\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_1|\mathrm{Re}((\overline{\alpha_{2,0}}+\overline{\alpha_{1,1}}+\overline{\alpha_{0,2}})v_n\overline{v_{n+2}})|\,.
\end{aligned}$$

Nu geldt dat voor zekere $C_2 > 0$, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+3)^{2k}}{(n+1)^{2k-1}} \quad \le \quad n + C_2\,,$$

immers, de functie $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$g(x) := \frac{(x+3)^{2k}}{(x+1)^{2k-1}}$$

is continu, en, voor $x \to \infty$,

$$g(x) = x + O(1)\,.$$

We vinden

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+2}(n+3)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\{\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})\mathrm{Re}(v_n\overline{v_{n+2}})+\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})\mathrm{Im}(v_n\overline{v_{n+2}})\} \\
&\quad\le \sum_{n=0}^{\infty}\{\tfrac{1}{2}|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})|[(n+2)|v_n|^2+(n+C_2)|v_{n+2}|^2] \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|[(n+2)|v_n|^2+(n+C_2)|v_{n+2}|^2] \\
&\quad= \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})|+|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|)\{(n+2)|v_n|^2+(n+C_2)|v_{n+2}|^2\}
\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}
S_1 \quad&\le \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})|+|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|)\{(n+2)|v_n|^2+(n+C_2)|v_{n+2}|^2\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} C_1|\alpha_{2,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2}|(|v_n|^2+|v_{n+2}|^2) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty}\{(|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})|+|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|)n+A_1\}|v_n|^2
\end{aligned}$$

voor zekere $A_1 = A_1(k,\underline{\alpha}) > 0$.

Vervolgens schatten we S_2. Bedenk dat, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+1)^{k+\frac{1}{2}}}{(n+2)^k} \quad = \quad \frac{(n+2)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} + \frac{(n+1)^{2k}-(n+2)^{2k}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+2)^k}\ ;$$

terwijl, voor zekere $C_3 > 0$, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{(n+1)^{2k}-(n+2)^{2k}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+2)^k}\right| \le C_3\ ,$$

immers, de functie $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$h(x) := \frac{(x+1)^{2k}-(x+2)^{2k}}{(x+1)^{k-\frac{1}{2}}(x+2)^k}$$

is continu, en

$$\lim_{x\to\infty}|h(x)| = 0\ .$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned}
S_2 \quad&\le \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(n+2)^k}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\{\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})\mathrm{Im}(v_n\overline{v_{n+1}})+\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})\mathrm{Re}(v_n\overline{v_{n+1}})\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} C_3|\mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{1,0}}+\overline{\alpha_{0,1}})v_n\overline{v_{n+1}}]|\ .
\end{aligned}$$

Voor alle $\lambda > 0$ geldt nu, omdat voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+2)^{2k}}{(n+1)^{2k}} \quad \le \quad 4^{|k|}\ ,$$

dat

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leq \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)((n+1)\lambda^2|v_n|^2 + \tfrac{4^{|k|}}{\lambda^2}|v_{n+1}|^2) \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} C_3|\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1}|(|v_n|^2 + |v_{n+1}|^2) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)n\lambda^2 + A_2\}|v_n|^2
\end{aligned}
$$

voor zekere $A_2 = A_2(k, \underline{\alpha}, \lambda) > 0$.

Als laatste geldt, voor zekere $A_3 = A_3(\underline{\alpha}) > 0$,

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+\tfrac{1}{2})\mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) + \mathrm{Re}(-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0})\}|v_n|^2 \,. \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\{\mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})n + A_3\}|v_n|^2 \,.
\end{aligned}
$$

Dit alles betekent

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\quad = S_1 + S_2 + S_3 \\
&\quad \leq \sum_{n=0}^{\infty}\{[|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})| + |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)\lambda^2 \\
&\qquad\qquad + \mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})]n + A_1 + A_2 + A_3\}|v_n|^2 \,.
\end{aligned}
$$

Zij nu A diffusieachtig, i.e. voor zekere $\epsilon, \delta > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) \geq \delta$, $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq -\delta$ en $|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| \leq 2\delta - \epsilon$. Dan geldt

$$
\begin{array}{lclcl}
2\delta - 2\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) & \leq & 0 & \leq & -2\delta - 2\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \,, \\
2\delta + \mathrm{Re}(\alpha_{0,2} - \alpha_{2,0}) & \leq & \mathrm{Re}(\alpha_{0,2} + \alpha_{2,0}) & \leq & -2\delta - \mathrm{Re}(\alpha_{0,2} - \alpha_{2,0}) \,, \\
0 & \leq & 2\delta - \epsilon & \leq & -\epsilon - \mathrm{Re}(\alpha_{0,2} - \alpha_{2,0}) - |\mathrm{Re}(\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})| \,,
\end{array}
$$

i.e.

$$
|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})| + |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| + \mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) \quad \leq \quad -\epsilon \,.
$$

Kies nu λ zo klein dat $\lambda^2 \leq \frac{\sqrt{2}\epsilon}{|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|}$. Dan geldt

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\quad \leq \sum_{n=0}^{\infty}\{[-\epsilon + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)\lambda^2]n + A_1 + A_2 + A_3\}|v_n|^2 \\
&\quad \leq b\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|^2 \\
&\quad = b(\underline{v}, \underline{v}) \,,
\end{aligned}
$$

met

$$
b \quad = \quad A_1 + A_2 + A_3 \,.
$$

We beschouwen vervolgens $\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v})$ met $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,1}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = 0$. We vinden dan

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\quad \leq \sum_{n=0}^{\infty}\{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)\lambda^2 n + A_1 + A_2 + A_3\}|v_n|^2 \,.
\end{aligned}
$$

Met $\mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,1}) = 0$, i.e. A golfachtig, vinden we dan

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k} \underline{v}) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \{A_1 + A_2 + A_3\} |v_n|^2 \\
&= b(\underline{v}, \underline{v}) ,
\end{aligned}$$

met $b = A_1 + A_2 + A_3$. □

Lemma 1.12 *Er geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$: Er is een $b \geq 0$ zodanig dat voor alle $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$:*

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k} \underline{v}) \leq b(\mathrm{Q}\underline{v}, \underline{v}) .$$

Bewijs Zij $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$. Met lemma 1.10, en op dezelfde manier als in het bewijs van lemma 1.11, vinden we

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k} \underline{v}) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Q}\underline{v})_n \overline{(\mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k} \underline{v})_n}\Big) \\
&= 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) v_n \sum_{m=0}^{\infty} \overline{(\mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k})_{n,m}} \overline{v_m}\Big) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n}(n+1)^{k+1}}{(n-1)^{k-\frac{1}{2}}} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}} - \overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,2}}) \overline{v_{n-2}} v_n] \\
&\qquad + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(n+1)^{k+1}}{n^{k-\frac{1}{2}}} \mathrm{Re}[(\overline{-\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}}) \overline{v_{n-1}} v_n] \\
&\qquad + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathrm{Re}[((n+\tfrac{1}{2})(-\overline{\alpha_{2,0}} + \overline{\alpha_{0,2}}) - \tfrac{1}{2}\overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,0}}) \overline{v_n} v_n] \\
&\qquad + \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(n+1)^{k+\frac{3}{2}}}{(n+2)^k} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}}) v_n \overline{v_{n+1}}] \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+2}(n+1)^{k+\frac{3}{2}}}{(n+3)^k} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}} + \overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,2}}) v_n \overline{v_{n+2}}] \\
&= S_1 + S_2 + S_3 ,
\end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \tfrac{\sqrt{n+2}(n+3)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}} - \overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,2}}) \overline{v_n} v_{n+2}] \\
&\qquad + \tfrac{\sqrt{n+2}(n+1)^{k+\frac{3}{2}}}{(n+3)^k} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{2,0}} + \overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,2}}) v_n \overline{v_{n+2}}] \Big\} \\
S_2 &:= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \tfrac{(n+2)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} \mathrm{Re}[(-\overline{\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}}) \overline{v_n} v_{n+1}] \\
&\qquad + \tfrac{(n+1)^{k+\frac{3}{2}}}{(n+2)^k} \mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}}) v_n \overline{v_{n+1}}] \Big\} \\
S_3 &:= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathrm{Re}[((n+\tfrac{1}{2})(-\overline{\alpha_{2,0}} + \overline{\alpha_{0,2}}) - \tfrac{1}{2}\overline{\alpha_{1,1}} + \overline{\alpha_{0,0}}) \overline{v_n} v_n] .
\end{aligned}$$

We schatten S_1. Bedenk dat, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sqrt{n+2}(n+1)^{k+\frac{3}{2}}}{(n+3)^k} = \frac{\sqrt{n+2}(n+3)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} + \sqrt{n+2}\frac{(n+1)^{2k+1} - (n+3)^{2k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+3)^k} ,$$

terwijl, voor zekere $C_1 > 0$, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$|\sqrt{n+2}\frac{(n+1)^{2k+1}-(n+3)^{2k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+3)^k}| \leq C_1 n\ ,$$

immers, de functie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \sqrt{x+2}\frac{(x+1)^{2k+1}-(x+3)^{2k+1}}{(x+1)^{k-\frac{1}{2}}(x+3)^k}$$

is continu, en, voor $x \to \infty$

$$f(x) = -2(2k+1)x + O(1)\ .$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned} S_1 \quad &\leq \quad 2\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+2}(n+3)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\{\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})\mathrm{Re}(v_n\overline{v_{n+2}}) + \mathrm{Im}(\alpha_{1,1})\mathrm{Im}(v_n\overline{v_{n+2}})\} \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} C_1 n|\mathrm{Re}((\overline{\alpha_{2,0}}+\overline{\alpha_{1,1}}+\overline{\alpha_{0,2}})v_n\overline{v_{n+2}})|\ . \end{aligned}$$

Schrijf nu

$$\frac{\sqrt{n+2}(n+3)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} \quad = \quad \sqrt{n+2}\sqrt{n+1}\frac{(n+3)^{k+1}}{(n+1)^k}$$

en bedenk dat voor zekere $C_2 > 0$, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+3)^{2k+2}}{(n+1)^{2k}} \quad \leq \quad n^2 + C_2 n\ ,$$

immers, de functie $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$g(x) := \frac{(x+3)^{2k+2}}{(x+1)^{2k}}$$

is continu, en, voor $x \to \infty$,

$$g(x) = x^2 + O(x)\ .$$

We vinden

$$\begin{aligned} &2\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\sqrt{n+2}(n+3)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\{\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})\mathrm{Re}(v_n\overline{v_{n+2}}) + \mathrm{Im}(\alpha_{1,1})\mathrm{Im}(v_n\overline{v_{n+2}})\} \\ &\quad \leq \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}\{\tfrac{1}{2}|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})|[(n+2)(n+1)|v_n|^2 + (n^2+C_2 n)|v_{n+2}|^2] \\ &\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|[(n+2)(n+1)|v_n|^2 + (n^2+C_2 n)|v_{n+2}|^2] \\ &\quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}(|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})| + |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|)\{(n^2+3n+2)|v_n|^2 + (n^2+C_2 n)|v_{n+2}|^2\} \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} S_1 \quad &\leq \quad \sum_{n=0}^{\infty}(|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})| + |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|)\{(n^2+3n+2)|v_n|^2 + (n^2+C_2 n)|v_{n+2}|^2\} \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}C_1 n|\alpha_{2,0}+\alpha_{1,1}+\alpha_{0,2}|(|v_n|^2 + |v_{n+2}|^2) \\ &\leq \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}\{(|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})| + |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})|)n^2 + A_1(n+1)\}|v_n|^2 \end{aligned}$$

voor zekere $A_1 = A_1(k, \underline{\alpha}) > 0$.

Vervolgens schatten we S_2. Bedenk dat, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+1)^{k+\frac{3}{2}}}{(n+2)^k} = \frac{(n+2)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}} + \frac{(n+1)^{2k+1} - (n+2)^{2k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+2)^k} ;$$

terwijl, voor zekere $C_3 > 0$, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{(n+1)^{2k+1} - (n+2)^{2k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}(n+2)^k}\right| \leq C_3 n ,$$

immers, de functie $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$h(x) := \frac{(x+1)^{2k+1} - (x+2)^{2k+1}}{(x+1)^{k-\frac{1}{2}}(x+2)^k}$$

is continu, en, voor $x \to \infty$

$$h(x) = -(2k+1)\sqrt{x} + O(x^{-\frac{1}{2}}) .$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned} S_2 \quad &\leq \quad 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(n+2)^{k+1}}{(n+1)^{k-\frac{1}{2}}}\{\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})\mathrm{Im}(v_n\overline{v_{n+1}}) + \mathrm{Re}(\alpha_{0,1})\mathrm{Re}(v_n\overline{v_{n+1}})\} \\ &\qquad + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} C_3 n|\mathrm{Re}[(\overline{\alpha_{1,0}} + \overline{\alpha_{0,1}})v_n\overline{v_{n+1}}]| . \end{aligned}$$

Voor alle $\lambda > 0$ geldt nu, omdat voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+2)^{2k+2}}{(n+1)^{2k+1}} \leq 4^{|k|+1}(n+2) ,$$

dat,

$$\begin{aligned} S_2 \quad &\leq \quad \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)\{(n+1)^2\lambda^2|v_n|^2 + \tfrac{4^{|k|+1}}{\lambda^2}(n+2)|v_{n+1}|^2\} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} C_3 n|\alpha_{1,0} + \alpha_{0,1}|(|v_n|^2 + |v_{n+1}|^2) \\ &\leq \quad \sum_{n=0}^{\infty}\{\sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)n^2\lambda^2 + A_2(n+1)\}|v_n|^2 \end{aligned}$$

voor zekere $A_2 = A_2(k, \underline{\alpha}, \lambda) > 0$.

Als laatste geldt, voor zekere $A_3 = A_3(\underline{\alpha}) > 0$,

$$\begin{aligned} S_3 \quad &= \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)(n+\tfrac{1}{2})\mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) + (n+1)\mathrm{Re}(-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0})\}|v_n|^2 \\ &= \quad 2\sum_{n=0}^{\infty}\{n^2\mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2}) + A_3(n+1)\}|v_n|^2 . \end{aligned}$$

Dit alles betekent

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\ &\quad = \quad S_1 + S_2 + S_3 \\ &\quad \leq \quad \sum_{n=0}^{\infty}\{[2|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})| + 2|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| + \sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)\lambda^2 \\ &\qquad\qquad + 2\mathrm{Re}(-\alpha_{2,0} + \alpha_{0,2})]n^2 + [A_1 + A_2 + A_3](n+1)\}|v_n|^2 . \end{aligned}$$

Als nu A diffusieachtig is, dan geldt op dezelfde gronden als in het bewijs van lemma 1.11, dat $|\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2})| + |\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| + \mathrm{Re}(-\alpha_{2,0}+\alpha_{0,2}) \leq -\epsilon < 0$. Kies nu λ weer zo klein dat $\lambda^2 \leq \frac{\sqrt{2}\epsilon}{|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})|+|\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|}$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\{[-\epsilon + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(|\mathrm{Im}(\alpha_{1,0})| + |\mathrm{Re}(\alpha_{0,1})|)\lambda^2]n^2 \\
&\qquad + [A_1 + A_2 + A_3](n+1)\}|v_n|^2 \\
&\leq [A_1 + A_2 + A_3]\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)|v_n|^2 \\
&= b\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Q}\underline{v})_n \overline{v}_n \\
&= b(\mathrm{Q}\underline{v}, \underline{v}) ,
\end{aligned}$$

met

$$b = A_1 + A_2 + A_3 .$$

We beschouwen vervolgens $\mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k}\underline{v})$ met A golfachtig, i.e. $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,1}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,1}) = 0$. We vinden dan

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k \mathrm{A} \mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}[A_1 + A_2 + A_3](n+1)|v_n|^2 . \\
&= b(\mathrm{Q}\underline{v}, \underline{v}) ,
\end{aligned}$$

met $b = A_1 + A_2 + A_3$. □

1.3.3 De operator A_k is een infinitesimaal-generator

We zullen aan de drie voorwaarden uit definitie C.2 refereren met voorwaarde (1), voorwaarde (2) en voorwaarde (3).

Lemma 1.13 *De operator $\mathrm{A}_k(\underline{\alpha})$ is een pre-infinitesimaal-generator op de ruimte h_k met hulpoperator Q_k.*

Bewijs Dat Q_k een dicht gedefinieerde, strict positieve, inverteerbare operator in h_k is, en dat $D(\mathcal{Q}_k^{-1}) = h_k$, volgt met lemma 1.6. Dat voldaan is aan voorwaarde (1) volgt uit lemma 1.8.

We bewijzen dat voldaan is aan voorwaarde (2), en beschouwen daartoe, voor $\underline{u} \in D(\mathrm{A}_k)$, $\mathrm{Re}(\underline{u}, \mathrm{A}_k\underline{u})_k$. Schrijf $\mathrm{Q}^k\underline{u} = \underline{v}$. Dan $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$. Er geldt, met lemma 1.11, voor zekere $b \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\underline{u}, \mathrm{A}_k\underline{u})_k &= \mathrm{Re}(\mathrm{Q}^k\underline{u}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\underline{u}) \\
&= \mathrm{Re}(\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\leq b(\underline{v}, \underline{v}) \\
&= b(\underline{u}, \underline{u})_k .
\end{aligned}$$

Als laatste bewijzen we dat voldaan is aan voorwaarde (3). We beschouwen, voor $\underline{u} \in D(\mathrm{Q}_k)$, $\mathrm{Re}(\mathrm{Q}_k\underline{u}, \mathrm{A}_k\underline{u})_k$. We schrijven $\mathrm{Q}^k\underline{u} = \underline{v}$. Dan $\underline{v} \in \mathrm{Q}^{\leftarrow}(l_2)$. Er geldt, met lemma 1.12, voor zekere

$b \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(\mathrm{Q}_k\underline{u}, \mathrm{A}_k\underline{u})_k \\
&\quad = \operatorname{Re}(\mathrm{Q}\mathrm{Q}^k\underline{u}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\mathrm{Q}^k\underline{u}) \\
&\quad = \operatorname{Re}(\mathrm{Q}\underline{v}, \mathrm{Q}^k\mathrm{A}\mathrm{Q}^{-k}\underline{v}) \\
&\quad \leq b(\mathrm{Q}\underline{v}, \underline{v}) \\
&\quad = b(\mathrm{Q}^{k+1}\underline{u}, \mathrm{Q}^k\underline{u}) \\
&\quad = b(\mathrm{Q}_k\underline{u}, \underline{u})_k\ .
\end{aligned}$$

□

Schrijf nu $\overline{\mathrm{A}}_k$ voor de door lemma 1.7 gegeven afsluiting van A_k. Dan geldt

Stelling 1.6 *De operator $\overline{\mathrm{A}}_k(\underline{\alpha})$ is een infinitesimaal-generator.* □

1.4 Existentie en éénduidigheid van de oplossing van het Cauchy-probleem in $S'(\mathbb{R})$

In deze paragraaf construeren we de propagator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$. Zij $k \in \mathbb{Z}$ en $\underline{\alpha}$ zodanig dat $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ golfachtig of diffusieachtig is. We definiëren

$$I_{\underline{\alpha}} := \begin{cases} (-\infty, \infty) & \text{als } \mathrm{A}(\underline{\alpha}) \text{ golfachtig is,} \\ [0, \infty) & \text{als } \mathrm{A}(\underline{\alpha}) \text{ diffusieachtig is.} \end{cases}$$

Zij nu $t \in I_{\underline{\alpha}}$.

1.4.1 De propagator op rijtjesruimten

De propagator op de ruimten h_k

We schrijven vanaf nu A_k voor de operator $\overline{\mathrm{A}}_k(\underline{\alpha})$: de nieuwe A_k is de afsluiting van de oude A_k. Met lemma 1.9, stelling 1.6, lemma C.1 en de stelling C.3 volgt de stelling:

Stelling 1.7 *De operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}$ is een begrensde operator op h_k. Dus ook: De operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_0}$ is een begrensde operator op l_2.* □

Omdat $\mathrm{A}_{k+1} \subset \mathrm{A}_k$, geldt:

Lemma 1.14 *Er geldt*

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_{k+1}} \subset \mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}\ .$$

□

De propagator op de ruimte s

Zij s als in definitie D.2.

Lemma 1.15 *Convergentie in s met betrekking tot de in lemma D.1 ingevoerde set van normen op s is equivalent aan convergentie met betrekking tot de set van normen op de ruimten h_k, $k \in \mathbb{Z}$.*

Bewijs Er geldt, voor $n \in \mathbb{N}$, $\underline{u} \in h_n$,

$$\begin{aligned}
\|\underline{u}\|_n^2 &= \|\mathrm{Q}^n\underline{u}\| \\
&= 2^{2n}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{2n}|u_j|^2 \\
&= 2^{2n}\|\underline{u}\|_{s,n}^2\ .
\end{aligned}$$

Convergentie in h_0-zin impliceert convergentie met betrekking tot de set $\{\|\cdot\|_k \mid k \leq 0\}$. □

Lemma 1.16 *Er geldt*

$$s = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} h_k \, .$$

Bewijs Zij $u \in s$. Dit betekent, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, $((j+1)^k u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_2$. I.e., met lemma 1.4, $u \in \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} (\mathrm{Q}^k)^{\leftarrow}(l_2)$. $\square$

Lemma 1.17 *We vatten s op als deelruimte van h_k, voor zekere k. We schrijven $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_\infty}$ voor de beperking van de operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}$ tot s. De operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_\infty}$ is continu op s.*

Bewijs Met lemma 1.14 volgt dat de definitie van $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_\infty}$ is onafhankelijk van de keuze van k. De operator is continu. Immers: Zij voor alle $j \in \mathbb{N}$ $\underline{u}_j \in s$ met $\underline{u}_j \to 0$ $(j \to \infty)$. Dan geldt, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, $\underline{u}_j \in h_k$, en met stelling 1.7 voor alle k dat $\|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}\underline{u}_j\|_k \to 0$ $(j \to \infty)$, i.e. $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_\infty}\underline{u}_j \to 0$ in s-zin. $\square$

De propagator op de ruimte s'

Zij s' als in definitie D.5.

Lemma 1.18 *Er geldt*

$$s' = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} h_k \, .$$

Bewijs De bewering $\underline{u} \in s'$ betekent: Er is een $p \in \mathbb{N}$ zodanig dat $((j+1)^{-p} u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_2$. Dit betekent: er is een $p \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\underline{u} \in h_{-p}$, i.e. $\underline{u} \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} h_k$. Immers $\bigcup_{k=1}^{\infty} h_k \subset h_0$. $\square$

Lemma 1.19 *Wanneer we s opvatten als deelruimte van s', dan is de operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_\infty}$, als operator in s', continu uit te breiden tot de operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_{-\infty}}$ op s'.*

Bewijs Zij $\underline{u} \in s'$. Dan geldt, met lemma 1.18, voor zekere k, $\underline{u} \in h_k$. We schrijven $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_{-\infty}}\underline{u} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}\underline{u}$. De aldus gedefinieerde operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_{-\infty}}$ is een operator op s'. Triviaal is dat deze operator een uitbreiding van de operator $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_\infty}$ is.

Deze operator is continu. Immers: Zij, voor alle $j \in \mathbb{N}$, $\underline{u}_j \in s'$, $\underline{u}_j \to 0$ in s'-zin, i.e. voor zekere k $\|u_j\|_k \to 0$. Dan, met stelling 1.7, $\|\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\underline{u}_j\|_k \to 0$, dus $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}u_j \to 0$ in s'-zin. $\square$

1.4.2 Distributieruimten gerepresenteerd als rijtjesruimten

We voeren de ruimten H_k in en representeren de ruimten H_k, $S(\mathbb{R})$ en $S'(\mathbb{R})$ door de rijtjesruimten h_k, s en s'.

De ruimten H_k

Definitie 1.10 We definiëren de functieruimte H_k als de verzameling

$$\{\sum_{j=0}^{\infty} u_j \psi_j \mid \underline{u} \in h_k\} \, .$$

Met stelling 1.5 volgt dat het inprodukt

$$(\sum_{j=0}^{\infty} u_j \psi_j, \sum_{l=0}^{\infty} v_l \psi_l) := (\underline{u}, \underline{v})_k$$

de ruimte H_k tot een Hilbert-ruimte maakt. $\square$

Zij U als in definitie 1.3. We kunnen deze operator nu uitbreiden tot een operator op H_k:

Lemma 1.20 *We definiëren de operator $U : H_k \to h_k$ door*

$$U \sum_{j=0}^{\infty} u_j \psi_j := \underline{u}\,.$$

Deze operator is een uitbreiding van de reeds gedefinieerde U. Triviaal is dat deze operator unitair is. □

De ruimte $S(\mathbb{R})$

Zij $S(\mathbb{R})$ als in definitie D.1. Met lemma 1.15 volgt:

Lemma 1.21 *De operator $U|_{S(\mathbb{R})}$ is het topologisch isomorfisme dat in lemma D.1 geconstrueerd wordt.* □

De ruimte $S'(\mathbb{R})$

Zij $S'(\mathbb{R})$ als in definitie D.3. We kunnen nu, met lemma D.3 de operator U uitbreiden tot een operator op $S'(\mathbb{R})$:

Lemma 1.22 *We schrijven, voor alle $u \in S'(\mathbb{R})$, $(Uu)_n = \langle u, \psi_n \rangle$, waar $\langle u, \psi_n \rangle$ staat voor de evaluatie van de functionaal u in ψ_n. Deze operator beeldt $S'(\mathbb{R})$ af op s', en is een uitbreiding van de reeds gedefinieerde U. De operator U is het in lemma D.3 beschreven isomorfisme.* □

Definitie 1.11 We noemen een rij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S'(\mathbb{R})$ *in $S'(\mathbb{R})$-zin convergent* naar $u \in S'(\mathbb{R})$, dan en slechts dan als voor $\underline{u}_n = Uu_n$ en $\underline{u} = Uu$ geldt: voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ geldt $\underline{u}_n \in h_k$ voor alle n en $\underline{u} \in h_k$, terwijl $\|\underline{u}_n - \underline{u}\|_k \to 0$. □

Bedenk dat nu per definitie geldt:

Lemma 1.23 *De rij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert in $S'(\mathbb{R})$-zin naar u, dan en slechts dan als $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in s'-zin naar $\underline{u}$ convergeert, i.e. $U : S'(\mathbb{R}) \to s'$ is continu.* □

1.4.3 Continuïteit van de propagator op distributieruimten

Bovenstaande paragraaf geeft een bijectie tussen de twee door onderstaand schema aangegeven rijen van ruimten; we noemen zulke rijen *Gelfand-rijen.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
S(\mathbb{R}) & \subset & H_n & \subset & L_2(\mathbb{R}) & \subset & H_{-n} & \subset & S'(\mathbb{R}) \\
\big\downarrow U & & \big\downarrow U & & \big\downarrow U & & \big\downarrow U & & \big\downarrow U \\
s & \subset & h_n & \subset & l_2 & \subset & h_{-n} & \subset & s'
\end{array}$$

Definitie 1.12 We schrijven, voor $-\infty \le k \le \infty$, $\mathcal{A}_k = U^{-1}\mathrm{A}_k U$. Met het isomorfisme U volgt: De operator $\mathcal{A}_\infty$ is een operator op $S(\mathbb{R})$, de operatoren $\mathcal{A}_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ zijn operatoren op H_k en de operator $\mathcal{A}_{-\infty}$ is een operator op $S'(\mathbb{R})$. □

We vinden nu:

Stelling 1.8 *We schrijven, voor $-\infty \le k \le \infty$, $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}_k} = U^{-1}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}U$. Voor deze operatoren geldt nu: De operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}_\infty}$ is een continue operator op $S(\mathbb{R})$; voor alle $k \in \mathbb{Z}$ is de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}_k}$ een begrensde operator op H_k, (dus ook: de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}_0}$ is een begrensde operator op $L_2(\mathbb{R})$); en de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}_{-\infty}}$ is een continue operator op $S'(\mathbb{R})$.*
Bewijs Volgt direct met de lemmata 1.20, 1.21 en 1.23, de stelling 1.7 en de lemmata 1.17, en 1.19. □

1.4.4 De propagator en het Cauchy-probleem

We schrijven nu $\mathcal{A}$ voor de operator $\mathcal{A}_{-\infty}$, en dus ook $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ voor de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}_{-\infty}}$. Beschouw het Cauchy-probleem:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= \mathcal{A}u(t)\,, \\ u(0) &= \phi \end{aligned} \tag{1.14}$$

voor $t \in I_{\underline{\alpha}}$, en met $\phi \in S'(\mathbb{R})$.

Zij $\phi \in H_k$. We noemen een functie $u(t) : I_{\underline{\alpha}} \to H_k$ een *gegeneraliseerde oplossing* in H_k van dit Cauchy-probleem als $u(t)$ voldoet aan $\overline{\mathcal{S}}u = 0$, met $\overline{\mathcal{S}}$ als in stelling C.1, en $\lim_{t\to 0} u(t) = \phi$ in H_k-zin.

Met stelling C.1 en stelling 1.8 vinden we nu:

Stelling 1.9 *Zij $\phi \in H_k$. We schrijven, voor alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$, $u(t) := \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$. Er geldt: $u(t) \in H_k$, en $u(t)$ is een (en de enige) gegeneraliseerde oplossing van het Cauchy-probleem in H_k. Verder geldt, voor zekere $C > 0$, $\|u(t)\|_k \le C\|\phi\|_k$.* □

Lemma 1.24 *Er geldt, voor $-\infty \le k \le \infty$, $U^{-1}\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_k}U = \mathrm{e}^{tU^{-1}\mathrm{A}_kU}$.*
Bewijs Omdat A_k een infinitesimaal-generator is op h_k, is $\mathcal{A}_k$ een infinitesimaal-generator op H_k. De operator $\mathrm{e}^{tU^{-1}\mathrm{A}_kU} = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}_k}$ is dus wel-gedefinieerd. Met bovenstaande stelling volgt de gelijkheid. □

Zij $\phi \in S'(\mathbb{R})$. Een functie $u(t) : I_{\underline{\alpha}} \to S'(\mathbb{R})$ heet een *stricte oplossing* in $S'(\mathbb{R}) = D(\mathcal{A})$ van het Cauchy-probleem als

- $u(t)$ is in $S'(\mathbb{R})$-zin continu in alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$,
- $u(t)$ is in $S'(\mathbb{R})$-zin differentieerbaar,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \mathcal{A}u(t)$ en $u(t) \to \phi$ in $S'(\mathbb{R})$-zin voor $t \to 0$.

Stelling 1.10 *Zij $\phi \in S(\mathbb{R})$. We schrijven, voor alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$, $u(t) := \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$. Dan is $u(t)$ een (en de enige) stricte oplossing van het Cauchy-probleem in $S(\mathbb{R})$.*
Bewijs Omdat $\phi \in S(\mathbb{R})$, geldt $\underline{\phi} = U\phi \in s$, dus, met lemma 1.16, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, $\underline{\phi} \in h_{k+1} = (\mathrm{Q}^{k+1})^{\leftarrow}(l_2) = D(\mathrm{A}_k)$. Dus ook $\underline{\phi} \in h_k$. Omdat A_k een infinitesimaal-generator is in h_k, volgt, met stelling C.4: Voor de gegeneraliseerde oplossing $\underline{u}(t)$, $t \in I_{\underline{\alpha}}$, van de evolutievergelijking in h_k geldt $\underline{u}(t) \in D(\mathrm{A}_k)$, (dus $u(t) \in D(\mathrm{A}_{-\infty})$) en $\underline{u}(t)$ is voor alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$ continu differentieerbaar in h_k-zin. Met de stelling C.1 volgt: $\underline{u}(t) \to \underline{\phi}$ in h_k-zin voor $t \to 0$.

Beschouw nu $u(t) = U^{-1}\underline{u}(t)$. Omdat $\underline{u}(t) \in D(\mathrm{A}_{-\infty})$ geldt $u(t) \in D(\mathcal{A}_{-\infty})$, en omdat $\underline{u}(t)$ continu differentieerbaar is in h_k-zin voor alle $k \in \mathbb{Z}$, is $u(t)$ continu differentieerbaar in H_k-zin voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Dus $u(t)$ is differentieerbaar in $S(\mathbb{R})$-zin. Evenzo: $u(t) \to \phi$ in $S(\mathbb{R})$-zin voor $t \to 0$. □

Stelling 1.11 *Zij $\phi \in S'(\mathbb{R})$. We schrijven, voor alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$, $u(t) := \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$. Dan is $u(t)$ een (en de enige) stricte oplossing van het Cauchy-probleem in $S'(\mathbb{R})$.*
Bewijs Omdat $\phi \in S'(\mathbb{R})$, geldt, met lemma 1.22 $\underline{\phi} = U\phi \in s'$, dus, met lemma 1.18, voor zekere $l \in \mathbb{Z}$, zeg $k+1$, $\underline{\phi} \in h_{k+1} = (\mathrm{Q}^{k+1})^{\leftarrow}(l_2) = D(\mathrm{A}_k)$. Dus ook $\underline{\phi} \in h_k$. Omdat A_k een infinitesimaal-generator is in h_k, volgt, met stelling C.4: Voor de gegeneraliseerde oplossing $\underline{u}(t)$, $t \in I_{\underline{\alpha}}$, van de evolutievergelijking in h_k geldt $\underline{u}(t) \in D(\mathrm{A}_k) \subset D(\mathrm{A}_\infty)$ en $\underline{u}(t)$ is voor alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$ continu differentieerbaar in h_k-zin. Met de stelling C.1 volgt: $\underline{u}(t) \to \underline{\phi}$ in h_k-zin voor $t \to 0$.

Beschouw nu $u(t) = U^{-1}\underline{u}(t)$. Omdat $\underline{u}(t) \in D(\mathrm{A}_\infty)$ geldt $u(t) \in D(\mathcal{A}_\infty) = D(\mathcal{A})$, en omdat $\underline{u}(t)$ continu differentieerbaar is in h_k-zin, is $u(t)$ continu differentieerbaar in H_k-zin. Dus $u(t)$ is ook differentieerbaar in $S'(\mathbb{R})$-zin. Evenzo: $u(t) \to \phi$ in $S'(\mathbb{R})$-zin voor $t \to 0$. □

Hoofdstuk 2

De ruimte GF als invariante deelruimte

Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een deelruimte van Gegeneraliseerde Functies **GF** van $S'(\mathbb{R})$ geïntroduceerd, waarvan we aan zullen tonen dat die invariant is onder de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha})}$, onder zekere voorwaarden op $\underline{\alpha}$.

De introductie van deze deelruimte wordt voorafgegaan door enige opmerkingen over eigenschappen van de hier beschouwde evolutievergelijking, in paragraaf 2.1.

In paragraaf 2.2 construeren we **GF**. De ruimte **GF** is een uitbreiding van het Triviale Model $\mathbf{GF}_t$ van Lodder (zie [L, Chapter 3, p. 21]), een niet-genormeerde vectorruimte met een scalair produkt. In tegenstelling tot $\mathbf{GF}_t$, is **GF** een ruimte waarin ook elementen die zich gedragen als functies van de vorm $\mathrm{e}^{-\mu x^2}$ bestaan, en waarop een schuifafbeelding $\mathcal{T}_a$ en een schaalafbeelding $\mathcal{S}_a$ gedefiniëerd is. De ruimte **GF** wordt opgespannen door de gegeneraliseerde functies $x^p\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}$ en $\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x-b)$.

In paragraaf 2.3 evalueren we de operatoren $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{E}_a$ en $\mathcal{S}_a$ op $S'(\mathbb{R})$ in de basiselementen van **GF**, en tonen we daarmee aan dat **GF** invariant is onder deze operatoren. Later zal blijken dat dit een nodige voorwaarde is voor geslotenheid van **GF** onder de actie van $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$.

In paragraaf 2.4 wordt **GF** van een (zwak) convergentie-begrip voorzien, en definieer ik differentieerbaarheid van afbeeldingen $\mathbb{C} \to \mathbf{GF}$. Paragraaf 2.5 behandelt het Cauchy-probleem in **GF**, met de basis-elementen $\eta_{(\mu)}^{(j,\beta)}$ als beginvoorwaarde. In de paragraaf 2.6 lossen we de evolutievergelijking in **GF** op.

Paragraaf 2.7 handelt over het verband tussen de propagator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ en de operatoren $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{S}_a$ en $\mathcal{F}$. Dit werpt enig licht op de keuze van de ruimte **GF**. In paragraaf 2.8 wordt de theorie toegepast op de Schrödinger-vergelijking voor de harmonische oscillator, met als beginconditie een delta-functie.

Voor de oplossing van het eigenwaarde-probleem voor de operator $\mathcal{A}$ op **GF** zij verwezen naar bijlage E.

Notatie

We geven natuurlijke getallen aan met p, q, en getallen in $\mathbb{Z}$ met j. Reëele getallen geven we aan met a, b, c, d, x, y en complexe getallen met $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$. We definiëren de Heaviside stapfunctie H door

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \geq 0, \\ 0 & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

We introduceren de functie $\sqrt{\cdot}$ op $\mathbb{C}$: voor $r \geq 0$ en $-\pi < \phi \leq \pi$,

$$\sqrt{r e^{i\phi}} := \sqrt{r} e^{\frac{1}{2} i\phi} .$$

Met $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{E}_a$ en $\mathcal{S}_a$ geef ik de operatoren op $S'(\mathbb{R})$ aan zoals die zijn ingevoerd in bijlage D. Voordat we de ruimte **GF** introduceren, merken we nog het volgende op over de propagator onder $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_a$ en $\mathcal{E}_a$.

2.1 De operator $\mathcal{A}$ en de evolutievergelijking onder $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}_a$ en $\mathcal{E}_a$

2.1.1 Enige eigenschappen van de operator $\mathcal{A}$

Lemma 2.1 *Er geldt*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\mathcal{A}(\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\
&\quad = \mathcal{A}(-\alpha_{0,2},\ -\alpha_{1,1},\ -i\alpha_{0,1},\ -\alpha_{2,0},\ -i\alpha_{1,0},\ \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1})\mathcal{F} .
\end{aligned}$$

Bewijs Er geldt, met de vergelijkingen D.7 en D.8,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathcal{A} &= \alpha_{2,0}\mathcal{F}\mathcal{D}^2 + \alpha_{1,1}\mathcal{F}\mathcal{X}\mathcal{D} + \alpha_{1,0}\mathcal{F}\mathcal{D} + \alpha_{0,2}\mathcal{F}\mathcal{X}^2 + \alpha_{0,1}\mathcal{F}\mathcal{X} + \alpha_{0,0}\mathcal{F} \\
&= -\alpha_{2,0}\mathcal{X}^2\mathcal{F} - \alpha_{1,1}\mathcal{D}\mathcal{X}\mathcal{F} - i\alpha_{1,0}\mathcal{X}\mathcal{F} - \alpha_{0,2}\mathcal{D}^2\mathcal{F} - i\alpha_{0,1}\mathcal{D}\mathcal{F} + \alpha_{0,0}\mathcal{F} \\
&= (-\alpha_{2,0}\mathcal{X}^2 - \alpha_{1,1}\mathcal{X}\mathcal{D} - i\alpha_{1,0}\mathcal{X} - \alpha_{0,2}\mathcal{D}^2 - i\alpha_{0,1}\mathcal{D} + \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1})\mathcal{F} \\
&= \mathcal{A}(-\alpha_{0,2},\ -\alpha_{1,1},\ -i\alpha_{0,1},\ -\alpha_{2,0},\ -i\alpha_{1,0},\ \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1})\mathcal{F} .
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2 *Er geldt*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_a\mathcal{A}(\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\
&\quad = \mathcal{A}(\alpha_{2,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0} - a\alpha_{1,1},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{0,1} - 2a\alpha_{0,2},\ a^2\alpha_{0,2} - a\alpha_{0,1} + \alpha_{0,0})\mathcal{T}_a .
\end{aligned}$$

Bewijs Er geldt, omdat volgens de vergelijkingen D.10 en D.11 $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}_a$ commuteren, terwijl $\mathcal{T}_a\mathcal{X} = (\mathcal{X} - a\mathcal{I})\mathcal{T}_a$, dat

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_a\mathcal{A}(\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\
&\quad = \alpha_{0,2}\mathcal{D}^2\mathcal{T}_a + \alpha_{1,1}(\mathcal{X} - a\mathcal{I})\mathcal{D}\mathcal{T}_a + \alpha_{1,0}\mathcal{D}\mathcal{T}_a \\
&\qquad\qquad + \alpha_{0,2}(\mathcal{X} - a\mathcal{I})^2\mathcal{T}_a + \alpha_{0,1}(\mathcal{X} - a\mathcal{I})\mathcal{T}_a + \alpha_{0,0}\mathcal{T}_a \\
&\quad = (\alpha_{0,2}\mathcal{D}^2 + \alpha_{1,1}\mathcal{X}\mathcal{D} + (\alpha_{1,0} - a\alpha_{1,1})\mathcal{D} \\
&\qquad\qquad + \alpha_{0,2}\mathcal{X}^2 + (\alpha_{0,1} - 2a\alpha_{0,2})\mathcal{X} + a^2\alpha_{0,2} - a\alpha_{0,1} + \alpha_{0,0})\mathcal{T}_a \\
&\quad = \mathcal{A}(\alpha_{2,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0} - a\alpha_{1,1},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{0,1} - 2a\alpha_{0,2},\ a^2\alpha_{0,2} - a\alpha_{0,1} + \alpha_{0,0})\mathcal{T}_a .
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.3 *Er geldt*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_a\mathcal{A}(\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\
&\quad = \mathcal{A}(\alpha_{2,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0} + 2ia\alpha_{0,2},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{0,1} + ia\alpha_{1,1},\ -a^2\alpha_{0,2} + ia\alpha_{1,0} + \alpha_{0,0})\mathcal{E}_a .
\end{aligned}$$

Bewijs Er geldt, omdat volgens de vergelijkingen D.18 en D.19 $\mathcal{X}$ en $\mathcal{E}_a$ commuteren, terwijl $\mathcal{E}_a\mathcal{D} = (\mathcal{D} + ia\mathcal{I})\mathcal{E}_a$, dat

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_a\mathcal{A}(\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\
&= \alpha_{0,2}(\mathcal{D} + ia\mathcal{I})^2\mathcal{E}_a + \alpha_{1,1}\mathcal{X}(\mathcal{D} + ia\mathcal{I})\mathcal{E}_a + \alpha_{1,0}(\mathcal{D} + ia\mathcal{I})\mathcal{E}_a \\
&\qquad + \alpha_{0,2}\mathcal{X}^2\mathcal{E}_a + \alpha_{0,1}\mathcal{X}\mathcal{E}_a + \alpha_{0,0}\mathcal{E}_a \\
&= (\alpha_{0,2}\mathcal{D}^2 + \alpha_{1,1}\mathcal{X}\mathcal{D} + (\alpha_{1,0} + 2ia\alpha_{0,2})\mathcal{D} \\
&\qquad + \alpha_{0,2}\mathcal{X}^2 + (\alpha_{0,1} + ia\alpha_{1,1})\mathcal{X} - a^2\alpha_{0,2} + ia\alpha_{1,0} + \alpha_{0,0})\mathcal{E}_a \\
&= \mathcal{A}(\alpha_{2,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0} + 2ia\alpha_{0,2},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{0,1} + ia\alpha_{1,1},\ -a^2\alpha_{0,2} + ia\alpha_{1,0} + \alpha_{0,0})\mathcal{E}_a\ .
\end{aligned}$$

□

2.1.2 Differentieerbaarheid, enige eigenschappen van de propagator

Definitie 2.1 Een afbeelding $u(\alpha) : \mathbb{C} \to S'(\mathbb{R})$ heet *differentieerbaar* (in $S'(\mathbb{R})$-zin) in $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ als voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ de afbeelding $\langle u(\alpha), \phi\rangle : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differentieerbaar is in α_0. We schrijven dan, voor alle $\phi \in S'(\mathbb{R})$,

$$\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}u(\alpha), \phi\rangle|_{\alpha=\alpha_0} \quad = \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\langle u(\alpha), \phi\rangle|_{\alpha=\alpha_0}\ .$$

□

Deze definitie is in overeenstemming met het zwakke convergentiebegrip: Als $u(\alpha) : \mathbb{C} \to S'(\mathbb{R})$ differentieerbaar is in α_0, dan geldt, volgens [G&S, p. 149],

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}u(\alpha_0) \quad = \quad \lim_{\alpha\to\alpha_0} \frac{u(\alpha) - u(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

Met de lemmata 2.1, 2.2 en 2.3 is eenvoudig in te zien dat het volgende geldt:

Lemma 2.4 *Zij $a \in \mathbb{R}$. Als $\mathcal{A}$ golfachtig, respectievelijk diffusieachtig is, dan zijn ook $\mathcal{F}\mathcal{A}\mathcal{F}^{-1}$, $\mathcal{T}_a\mathcal{A}\mathcal{T}_{-a}$ en $\mathcal{E}_a\mathcal{A}\mathcal{E}_{-a}$ golfachtig, respektievelijk diffusieachtig.* □

Verder geldt:

Lemma 2.5 *Zij* A *golf- of diffusieachtig. Dan geldt, voor $t \in I_{\underline{\alpha}}$,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\mathcal{F}^{-1} &= \mathrm{e}^{t\mathcal{F}\mathcal{A}\mathcal{F}^{-1}} \\
\mathcal{T}_a\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\mathcal{T}_{-a} &= \mathrm{e}^{t\mathcal{T}_a\mathcal{A}\mathcal{T}_{-a}} \\
\mathcal{E}_a\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\mathcal{E}_{-a} &= \mathrm{e}^{t\mathcal{E}_a\mathcal{A}\mathcal{E}_{-a}}\ .
\end{aligned}$$

Verder merken we op dat, voor alle $T \geq 0$,

$$\mathrm{e}^{(t+T)\mathcal{A}} \quad = \quad \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\mathrm{e}^{T\mathcal{A}}\ .$$

Bewijs Zij $\mathcal{R} \in \{\mathcal{F}, \mathcal{T}_a, \mathcal{E}_a\}$. Als, voor $t \in I_{\underline{\alpha}}$, $u(t)$ voldoet aan

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \quad = \quad \mathcal{A}u(t)\ ,$$

dan voldoet $\mathcal{R}u(t)$ op $I_{\underline{\alpha}}$ aan

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{R}u(t) \quad = \quad \mathcal{R}\mathcal{A}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}u(t)\ ,$$

immers, $\mathcal{R}$ is continu, zoals in bijlage D is aangetoond, dus, omdat $u(t)$ continu differentieerbaar is, is ook $\mathcal{R}u(t)$ continu differentieerbaar; er geldt $\mathcal{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{R}u(t)$. Verder geldt met lemma 2.4 dat de afbeelding $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{R}\mathcal{A}\mathcal{R}^{-1}$ golf- en diffusieachtigheid behoudt.

Als, voor $t \in I_{\underline{\alpha}}$, $u(t)$ oplossing is van

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= \mathcal{A}u(t)\,,\\ u(0) &= \phi\,;\end{aligned}$$

dan geldt voor alle $T \geq 0$ dat $t + T \in I_{\underline{\alpha}}$. Verder voldoet $v(t) = u(t+T)$ aan

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) &= \mathcal{A}v(t)\,,\\ v(0) &= u(T)\,.\end{aligned}$$

□

In paragraaf 2.7 zal blijken dat deze eigenschappen vermoedens doen rijzen over een groepsstructuur van de operatoren $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ op de ruimte **GF**.

2.2 De ruimte GF

Definitie 2.2 We definiëren de lineaire functionaal δ: voor alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \delta, u\rangle := \overline{u(0)}\,.$$

Er geldt $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, immers δ is lineair en zwak continu, wat eenvoudig is in te zien. □

We schrijven, net als in [G&S], $\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x-a) := \mathcal{D}^q\mathcal{T}_a\delta$, waar $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}_a$ als in bijlage D.

Definitie 2.3 We definiëren de basiselementen $\eta_{(\mu)}^{(j,\beta)}$:

$$\eta_{(\mu)}^{(j,\beta)}(x) := \begin{cases} x^p\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2} & \text{als } j = p+1, \text{ en òf } \mathrm{Re}(\mu) = 0 \text{ en } \beta = b \text{ òf } \mathrm{Re}(\mu) > 0,\\ \frac{1}{(-1)^q q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x-b) & \text{als } j = -q,\ \beta = b \text{ en } \mu = 0,\\ 0 & \text{anders,}\end{cases}$$

met $\beta, \mu \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{N}$ en $b \in \mathbb{R}$. □

We schrijven $\eta^{(-q,b)}$ voor het element $\eta_{(0)}^{(-q,b)}$. Er geldt, wellicht ten overvloede,

$$\begin{aligned}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= x^p\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\\ \eta^{(-q,b)} &= \frac{1}{(-1)^q q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x-b)\,.\end{aligned}$$

We definiëren:

Definitie 2.4 We definiëren de ruimte **GF** als de verzameling eindige lineaire combinaties van de basiselementen $\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)}$, $j \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$. We geven elementen van **GF** aan met f, g, h. Iedere vector $f \in \mathbf{GF}$ is te schrijven als

$$f = \sum_{j=-p_f}^{p_f}\sum_{k=-p_f}^{p_f}\sum_{l=-p_f}^{p_f}\beta_{j,k,l}\,\eta_{(\mu_l)}^{(j,\alpha_k)}\,,$$

met $\beta_{j,k,l} \in \mathbb{C}$. **GF** is, met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging, een vectorruimte over $\mathbb{C}$. □

We definiëren verder

Definitie 2.5 We definiëren de ruimte $\mathbf{GF}_+$ als de verzameling eindige lineaire combinaties van de basiselementen $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}$, en de ruimte $\mathbf{GF}_-$ als de verzameling eindige lineaire combinaties van de basiselementen $\eta^{(-q,a)}$. □

We kunnen nu **GF** schrijven als de directe som

$$\mathbf{GF} = \mathbf{GF}_+ + \mathbf{GF}_-$$

Met 'operator' bedoelen we vanaf nu een operator òp **GF**.

Voor de complexe getallen μ en ν zal vanaf nu gelden: $\mathrm{Re}(\mu) \geq 0$ en $\mathrm{Re}(\nu) \geq 0$. (Behalve waar anders vermeld.)

Stelling 2.1 *De ruimte* **GF** *ligt dicht in* $S'(\mathbb{R})$.

Bewijs We bewijzen eerst dat **GF** een deelruimte is van $S'(\mathbb{R})$. Dat de functionaal $\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)}$ lineair is, is triviaal. We bewijzen dat $\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)}$ continu is. Als eerste beschouwen we $\eta^{(-q,a)}$. Omdat volgens de lemmata D.10 en D.11 $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}$ continu zijn, en omdat $\delta \in S'(\mathbb{R})$, geldt dat ook

$$\eta^{(-q,a)} = \frac{1}{(-1)^q q!} \mathcal{D}^q \mathcal{T}_a \delta$$

continu is. Vervolgens beschouwen we $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}$. Er geldt: $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \in C^\infty(\mathbb{R})$ en iedere n-de afgeleide van $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}$ is polynomiaal begrensd. Dan geldt, volgens [R&S 1, §V.3, Example 7, p. 137], $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \in S'(\mathbb{R})$. We concluderen:$\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)} \in S'(\mathbb{R})$.

Vervolgens bewijzen we dat **GF** dicht ligt in $S'(\mathbb{R})$. Er geldt, volgens lemma D.3 dat de Hermite-functies ψ_n dicht liggen in $S'(\mathbb{R})$. Nu geldt, voor alle $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle\{\psi_n \mid 0 \leq n \leq N\}\rangle &= \langle\{H_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mid 0 \leq n \leq N\}\rangle \\
&= \langle\{x^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mid 0 \leq n \leq N\}\rangle \\
&= \langle\{\eta_{(\frac{1}{2})}^{(p+1,0)} \mid 0 \leq p \leq N\}\rangle \\
&\subset \mathbf{GF}\,,
\end{aligned}$$

dus ook **GF** ligt dicht in $S'(\mathbb{R})$. □

2.3 Operatoren op de ruimte GF

We beperken het definitiegebied van de operatoren $\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{X}, \mathcal{T}_a, \mathcal{E}_a$ en $\mathcal{S}_a$ tot $\mathbf{GF} \subset S'(\mathbb{R})$, en schrijven $\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{X}, \mathcal{T}_a, \mathcal{E}_a$ en $\mathcal{S}_a$ voor de beperkte operatoren. We evalueren deze lineaire afbeeldingen op de expressies $\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)}$, en tonen daarmee aan dat de ruimte **GF** invariant is onder deze operatoren.

2.3.1 De operator $\mathcal{F}$

Lemma 2.6 *Voor de operator* $\mathcal{F}$ *op* **GF** *geldt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\eta^{(-q,a)} &= \frac{i^q}{\sqrt{2\pi}q!}\eta_{(0)}^{(q+1,-a)}\,, \\
\mathcal{F}\eta_{(0)}^{(p+1,a)} &= \sqrt{2\pi}p!i^p\eta^{(-p,a)}\,,
\end{aligned}$$

en, voor $\mu \neq 0$*,*

$$\mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} = i^p 2^{-\frac{1}{2}-p}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}})\eta_{(\frac{1}{4\mu})}^{(k+1,\frac{i\alpha}{2\mu})}\,.$$

Bewijs Met [G&S, §§ 2.2.3 en 2.2.6, p. 162] vinden we

$$\mathcal{F}\eta^{(-q,0)} = \frac{1}{(-1)^q q!}\mathcal{F}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x) = \frac{i^q}{\sqrt{2\pi}q!}x^q = \frac{i^q}{\sqrt{2\pi}q!}\eta_{(0)}^{(q+1,0)}\,.$$

Nu is met de definitie's van $\mathcal{T}_a$ en $\mathcal{E}_a$ eenvoudig in te zien dat

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a \eta^{(-q,b)} &= \eta^{(-q,a+b)} , \\ \mathcal{E}_a \eta^{(p+1,\beta)}_{(\mu)} &= \eta^{(p+1,a+\beta)}_{(\mu)} . \end{aligned}$$

Met de vergelijking D.9 vinden we nu

$$\mathcal{F}\eta^{(-q,a)} = \mathcal{F}\mathcal{T}_a\eta^{(-q,0)} = \mathcal{E}_{-a}\mathcal{F}\eta^{(-q,0)} = \frac{i^q}{\sqrt{2\pi}q!}\mathcal{E}_{-a}\eta^{(q+1,0)}_{(0)} = \frac{i^q}{\sqrt{2\pi}q!}\eta^{(q+1,-a)}_{(0)} .$$

Dit geeft de eerste gelijkheid. De tweede gelijkheid volgt nu met

$$\mathcal{P}\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)} = (-1)^p \eta^{(p+1,-\alpha)}_{(\mu)} ,$$

wat eenvoudig is in te zien, en de vergelijkingen D.15 en D.5:

$$\mathcal{F}\eta^{(p+1,a)}_{(0)} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{P}\eta^{(p+1,a)}_{(0)} = (-1)^p\mathcal{F}^{-1}\eta^{(p+1,-a)}_{(0)} = \sqrt{2\pi}p!i^p\eta^{(-p,a)} .$$

Als laatste berekenen we, voor $\mu \neq 0$, $\mathcal{F}\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)}$. Zij $\mathrm{Re}(\mu) > 0$. Bedenk dat nu $\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en dat we dus kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)}(y) &= (\mathcal{F}\mathcal{X}^p \mathrm{e}^{-i\alpha x-\mu x^2})(y) \\ &= (-i\mathcal{D})^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i(y-\alpha)x-\mu x^2} \mathrm{d}x . \end{aligned}$$

Bedenk nu dat, voor $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, (zie [T])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\alpha x-\mu x^2}\mathrm{d}x = \tfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}}\mathrm{e}^{\frac{\alpha^2}{4\mu}} .$$

Hiermee vinden we dat

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)}(y) \\ &= \frac{(-i)^p}{\sqrt{2\mu}}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}y^p}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\mu}} \\ &= (-i)^p 2^{-\frac{1}{2}-p}\mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p}\tfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\mathrm{e}^{-x^2}\big|_{x=\frac{y-\alpha}{2\sqrt{\mu}}} \\ &= i^p 2^{-\frac{1}{2}-p}\mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p}H_p(\tfrac{y-\alpha}{2\sqrt{\mu}})\mathrm{e}^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\mu}} \end{aligned}$$

Nu geldt, met de lemmata A.1 en A.2, dat

$$\begin{aligned} &H_p(\tfrac{y-\alpha}{2\sqrt{\mu}}) \\ &= 2^{-p}\mu^{-\frac{1}{2}p}\sum_{k=0}^{[p/2]}\tfrac{p!}{k!(p-2k)!}(1-4\mu)^k H_{p-2k}(y-\alpha) \\ &= 2^{-p}\mu^{-\frac{1}{2}p}\sum_{k=0}^{[p/2]}\sum_{j=0}^{p-2k}\tfrac{p!}{k!(p-2k)!}\binom{p-2k}{j}(1-4\mu)^k(-2\alpha)^{p-2k-j}H_j(y) \\ &= 2^{-p}\mu^{-\frac{1}{2}p}\sum_{j=0}^{p}\tfrac{p!}{j!}[\sum_{k=0}^{[(p-j)/2]}\tfrac{1}{k!(p-2k-j)!}(1-4\mu)^k(-2\alpha)^{p-2k-j}]H_j(y) . \end{aligned}$$

We herschrijven de laatste uitdrukking met

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{[(p-j)/2]} \tfrac{1}{k!(p-2k-j)!}(1-4\mu)^k(-2\alpha)^{p-2k-j} \\
&= \tfrac{1}{(p-j)!}(4\mu-1)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}j} \sum_{k=0}^{[(p-j)/2]} \tfrac{(p-j)!}{k!(p-j-2k)!}(-1)^k(-\tfrac{2\alpha}{\sqrt{4\mu-1}})^{p-j-2k} \\
&= \tfrac{1}{(p-j)!}(4\mu-1)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}j} H_{p-j}(-\tfrac{\alpha}{\sqrt{4\mu-1}}) \\
&=: a_{p,j}(\alpha,\mu)\ .
\end{aligned}$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{p} \tfrac{p!}{j!} a_{p,j}(\alpha,\mu) H_j(y) \\
&= \sum_{j=0}^{p} \sum_{l=0}^{[j/2]} \tfrac{p!}{l!(j-2l)!}(-1)^l a_{p,j}(\alpha,\mu)(2y)^{j-2l} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{p!}{l!k!}(-1)^l a_{p,k+2l}(\alpha,\mu)(2y)^k\ ,
\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}
&H_p(\tfrac{y-\alpha}{2\sqrt{\mu}}) \\
&= \mu^{-\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{p!}{l!k!}(-1)^l a_{p,k+2l}(\alpha,\mu) 2^{k-p} y^k\ ,
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}(y) \\
&= i^p \mu^{-\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{p!}{l!k!}(-1)^l a_{p,k+2l}(\alpha,\mu) 2^{-\frac{1}{2}+k-2p} y^k \mathrm{e}^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\mu}}\ .
\end{aligned}$$

We kunnen nu schrijven

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{p!}{l!k!}(-1)^l a_{p,k+2l}(\alpha,\mu) 2^{-\frac{1}{2}+k-2p} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}+k-2p} \tfrac{p!}{k!(p-k)!} \sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{(p-k)!}{l!(p-k-2l)!}(-1)^l (4\mu-1)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k-l} H_{p-k-2l}(-\tfrac{\alpha}{\sqrt{4\mu-1}})\ .
\end{aligned}$$

Schrijf $a = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\sqrt{4\mu-1}$, dan vinden we, met

$$\begin{aligned}
&(-1)^l(4\mu-1)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k-l} \\
&= (4\mu-1)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k}(\tfrac{1}{1-4\mu})^l \\
&= (4\mu-1)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k}(1-(\tfrac{4\mu-1}{4\mu})^{-1})^l \\
&= 2^{p-k}\mu^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} a^{p-k}(1-a^{-2})^l
\end{aligned}$$

dat, met lemma A.2,

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{p!}{l!k!}(-1)^l a_{p,k+2l}(\alpha,\mu) 2^{-\frac{1}{2}+k-2p} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}+k-2p} \tfrac{p!}{k!(p-k)!} 2^{p-k} \mu^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} a^{p-k} \sum_{l=0}^{[(p-k)/2]} \tfrac{(p-k)!}{l!(p-k-2l)!}(1-a^{-2})^l H_{p-k-2l}(-\tfrac{\alpha}{\sqrt{4\mu-1}}) \\
&= 2^{-\frac{1}{2}-p} \tfrac{p!}{k!(p-k)!} \mu^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-a\tfrac{\alpha}{\sqrt{4\mu-1}}) \\
&= 2^{-\frac{1}{2}-p} \binom{p}{k} \mu^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}) \ .
\end{aligned}$$

Verder geldt

$$e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4\mu}} = e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}} e^{-i(\frac{i\alpha}{2\mu})y - \frac{1}{4\mu}y^2} ,$$

Zodat we vinden

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}(y) \\
&= i^p \mu^{-\frac{1}{2}-p} e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{-\frac{1}{2}-p} \mu^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}) y^k e^{-i(\frac{i\alpha}{2\mu})y-\frac{1}{4\mu}y^2} \\
&= i^p 2^{-\frac{1}{2}-p} e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}) \eta_{(\frac{1}{4\mu})}^{(k+1,\frac{i\alpha}{2\mu})}(y) \ .
\end{aligned}$$

Vervolgens berekenen we $\mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}$ met $\mathrm{Re}(\mu) = 0$, $\mu \neq 0$. Er geldt voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ en voor $\mu \to \mu_0$, $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, $\mathrm{Re}(\mu_0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_{(\mu)}^{(p+1,b)}, \phi \rangle &= \langle x^p e^{-ibx-\mu x^2}, \phi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-ibx-\mu x^2} \overline{\phi(x)} dx \\
&\to \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-ibx-\mu_0 x^2} \overline{\phi(x)} dx \\
&= \langle \eta_{(\mu_0)}^{(p+1,b)}, \phi \rangle \ .
\end{aligned}$$

waarbij het verwisselen van de integraal en de limiet gerechtvaardigd wordt door Lebesgue's gemajoreerde convergentie stelling; een majorant is $x^p\overline{\phi(x)}$. Dit betekent

$$\eta_{(\mu)}^{(p+1,b)} \to \eta_{(\mu_0)}^{(p+1,b)}$$

in zwakke zin. Dus, omdat $\mathcal{F}$ continu is op $S'(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\eta_{(\mu_0)}^{(p+1,b)} &= \lim_{\mu\to\mu_0} \mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,b)} \\
&= i^p 2^{-\frac{1}{2}-p} \lim_{\mu\to\mu_0} e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}) \eta_{(\frac{1}{4\mu})}^{(k+1,\frac{i\alpha}{2\mu})} \\
&= i^p 2^{-\frac{1}{2}-p} e^{-\frac{\alpha^2}{4\mu_0}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mu_0^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu_0}}) \eta_{(\frac{1}{4\mu_0})}^{(k+1,\frac{i\alpha}{2\mu_0})} \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Verder vinden we, met $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{P}\mathcal{F}$,

Lemma 2.7 *Er geldt*

$$\mathcal{F}^{-1}\eta^{(-q,a)} = \tfrac{(-i)^q}{\sqrt{2\pi}q!}\eta_{(0)}^{(q+1,a)} ,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\eta_{(0)}^{(p+1,a)} = \sqrt{2\pi}(-i)^p p!\eta^{(-p,-a)} ,$$

en

$$\mathcal{F}^{-1}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} = i^p 2^{-\frac{1}{2}-p}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k\mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k}H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}})\eta_{(\frac{1}{4\mu})}^{(k+1,-\frac{i\alpha}{2\mu})} .$$

□

2.3.2 De operatoren $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{E}_a$ en $\mathcal{S}_a$

Lemma 2.8 *De operator $\mathcal{P}$ op* **GF** *wordt beschreven door*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} &= (-1)^p\eta_{(\mu)}^{(p+1,-\alpha)}\\ \mathcal{P}\eta^{(-q,a)} &= (-1)^q\eta^{(-q,-a)} .\end{aligned}$$

Bewijs De eerste gelijkheid volgt met direct met de definitie van $\mathcal{P}$. De tweede gelijkheid volgt met de vergelijking D.4 en lemma 2.7:

$$\mathcal{P}\eta^{(-q,a)} = \mathcal{F}^2\eta^{(-q,a)} = \frac{(-i)^q}{\sqrt{2\pi}q!}\mathcal{F}^3\eta_{(0)}^{(q+1,a)} = (-1)^q\mathcal{F}^4\eta^{(-q,-a)} = (-1)^q\eta^{(-q,-a)} .$$

□

Vervolgens beschouwen we $\mathcal{D}$. We vinden met eenvoudig rekenwerk dat:

Lemma 2.9 *De operator $\mathcal{D}$ op* **GF** *wordt beschreven door*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\eta^{(-q,a)} &= -(q+1)\eta^{(-q-1,a)}\\ \mathcal{D}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} &= p\eta_{(\mu)}^{(p,\alpha)} - i\alpha\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} - 2\mu\eta_{(\mu)}^{(p+2,\alpha)} .\end{aligned}$$

□

We beschouwen de operator $\mathcal{X}$.

Lemma 2.10 *De operator $\mathcal{X}$ op* **GF** *wordt beschreven door*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\eta^{(-q,a)} &= a\eta^{(-q,a)} + H(q-1)\eta^{(-q+1,a)}\\ \mathcal{X}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} &= \eta_{(\mu)}^{(p+2,\alpha)} .\end{aligned}$$

Bewijs Er geldt, met de vergelijking D.7 en de lemmata 2.7 en 2.9,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\eta^{(-q,a)} &= i\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1}\eta^{(-q,a)}\\ &= \frac{i(-i)^q}{\sqrt{2\pi}q!}\mathcal{F}\mathcal{D}\eta_{(0)}^{(q+1,a)}\\ &= \frac{a(-i)^q}{\sqrt{2\pi}q!}\mathcal{F}\eta_{(0)}^{(q+1,a)} + \frac{i(-i)^q q}{\sqrt{2\pi}q!}\mathcal{F}\eta_{(0)}^{(q,a)}\\ &= a\eta^{(-q,a)} + H(q-1)\eta^{(-q+1,a)} .\end{aligned}$$

De tweede gelijkheid volgt direct met de definitie van $\mathcal{X}$. □

Lemma 2.11 *Er geldt voor de operator $\mathcal{T}_a$ op* **GF***:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_a \eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= \mathrm{e}^{i\beta a-\mu a^2} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-a)^{p-j} \eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta+2i\mu a)} \\
\mathcal{T}_a \eta^{(-q,b)} &= \eta^{(-q,a+b)} \, .
\end{aligned}$$

Bewijs Er geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_a \eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}(x) &= (x-a)^p \mathrm{e}^{-i\beta(x-a)-\mu(x-a)^2} \\
&= \mathrm{e}^{i\beta a-\mu a^2} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-a)^{p-j} x^j \mathrm{e}^{-i(\beta+2i\mu a)x-\mu x^2} \\
&= \mathrm{e}^{i\beta a-\mu a^2} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} (-a)^{p-j} \eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta+2i\mu a)}(x) \, ,
\end{aligned}$$

en, met de definitie van $\mathcal{T}_a$ op $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{T}_a \eta^{(-q,b)} = \eta^{(-q,a+b)} \, .$$

□

Lemma 2.12 *De operator $\mathcal{E}_a$ op* **GF** *wordt beschreven door*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_a \eta^{(-q,b)} &= \mathrm{e}^{-iab} \sum_{j=0}^{q} \frac{(-ia)^j}{j!} \eta^{(j-q,b)} \\
\mathcal{E}_a \eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= \eta_{(\mu)}^{(p+1,a+\beta)} \, .
\end{aligned}$$

Bewijs Er geldt, met vergelijking D.9,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_a \eta^{(-q,b)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} q! i^q} \mathcal{E}_a \mathcal{F} \eta_{(0)}^{(q+1,b)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} q! i^q} \mathcal{F} \mathcal{T}_{-a} \eta_{(0)}^{(q+1,b)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-iab}}{\sqrt{2\pi} q! i^q} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} a^{q-j} \mathcal{F} \eta_{(0)}^{(j+1,b)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-iab}}{q! i^q} \sum_{j=0}^{q} j! \binom{q}{j} i^j a^{q-j} \eta^{(-j,b)} \\
&= \mathrm{e}^{-iab} \sum_{l=0}^{q} \frac{1}{l!} (-ia)^l \eta^{(-q+l,b)} \, .
\end{aligned}$$

De tweede gelijkheid volgt direct uit de definitie van $\mathcal{E}_a$. □

We beschouwen als laatste de operator $\mathcal{S}_a$.

Lemma 2.13 *De operator $\mathcal{S}_a$ op* **GF** *wordt beschreven door*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_a \eta^{(-q,b)} &= \tfrac{1}{a^{q+1}} \eta^{(-q,\frac{b}{a})} \\
\mathcal{S}_a \eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= a^p \eta_{(a^2\mu)}^{(p+1,a\beta)} \, .
\end{aligned}$$

Bewijs De tweede gelijkheid volgt direct met de definitie van $\mathcal{S}_a$. Hiermee, en met vergelijking D.12, volgt nu dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_a \eta^{(-q,b)} &= \tfrac{i^q}{\sqrt{2\pi} q!} \mathcal{S}_a \mathcal{F}^{-1} \eta_{(0)}^{(q+1,-b)} \\
&= \tfrac{i^q}{\sqrt{2\pi} a q!} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{S}_{\frac{1}{a}} \eta_{(0)}^{(q+1,-b)} \\
&= \tfrac{i^q}{\sqrt{2\pi} a^{q+1} q!} \mathcal{F}^{-1} \eta_{(0)}^{(q+1,-b/a)} \\
&= \tfrac{1}{a^{q+1}} \eta^{(-q,b/a)} \,.
\end{aligned}$$

□

2.3.3 De operator $\mathcal{A}$ als operator op de ruimte GF

Omdat $\mathcal{D}$ en $\mathcal{X}$ operatoren op **GF** zijn, is ook de operator $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$ te beperken tot een operator $\mathcal{A}$ op **GF**. We vinden voor deze operator:

Lemma 2.14 *Er geldt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= p(p-1)\alpha_{2,0}\eta_{(\mu)}^{(p-1,\beta)} + [-2ip\alpha_{2,0}\beta + p\alpha_{1,0}]\eta_{(\mu)}^{(p,\beta)} \\
&\quad + [-\alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2p+1)\alpha_{2,0}\mu + p\alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} \\
&\quad + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta_{(\mu)}^{(p+2,\beta)} \\
&\quad + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta_{(\mu)}^{(p+3,\beta)} \,,
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\eta^{(-q,b)} &= H(q-2)\alpha_{0,2}\eta^{(-q+2,b)} + H(q-1)[2\alpha_{0,2}b + \alpha_{0,1}]\eta^{(-q+1,b)} \\
&\quad + [\alpha_{0,2}b^2 - q\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}b + \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1}]\eta^{(-q,b)} \\
&\quad - (q+1)[\alpha_{1,1}b + \alpha_{1,0}]\eta^{(-q-1,b)} \\
&\quad + (q+1)(q+2)\alpha_{2,0}\eta^{(-q-2,b)} \,.
\end{aligned}$$

Bewijs Eenvoudig rekenwerk, immers, er geldt

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= (\alpha_{2,0}\mathcal{D}^2 + \alpha_{1,1}\mathcal{X}\mathcal{D} + \alpha_{1,0}\mathcal{D} + \alpha_{0,2}\mathcal{X}^2 + \alpha_{0,1}\mathcal{X} + \alpha_{0,0})\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} \\
&= p(p-1)\alpha_{2,0}\eta_{(\mu)}^{(p-1,\beta)} + [-2ip\alpha_{2,0}\beta + p\alpha_{1,0}]\eta_{(\mu)}^{(p,\beta)} \\
&\quad + [-\alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2p+1)\alpha_{2,0}\mu + p\alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} \\
&\quad + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta_{(\mu)}^{(p+2,\beta)} \\
&\quad + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta_{(\mu)}^{(p+3,\beta)} \,.
\end{aligned}$$

en

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}\mathcal{A}(\underline{\alpha})\eta^{(-q,b)} \\
&= \mathcal{A}(-\alpha_{0,2}, -\alpha_{1,1}, -i\alpha_{0,1}, -\alpha_{2,0}, -i\alpha_{1,0}, \alpha_{0,0}-\alpha_{1,1})\mathcal{F}\eta^{(-q,b)} \\
&= \tfrac{i^q}{\sqrt{2\pi q!}}\mathcal{A}(-\alpha_{0,2}, -\alpha_{1,1}, -i\alpha_{0,1}, -\alpha_{2,0}, -i\alpha_{1,0}, \alpha_{0,0}-\alpha_{1,1})\eta_{(0)}^{(q+1,-b)} \\
&= \tfrac{i^q}{\sqrt{2\pi q!}}\{-q(q-1)\alpha_{0,2}\eta_{(0)}^{(q-1,-b)} - [2iq\alpha_{0,2}b + qi\alpha_{0,1}]\eta_{(0)}^{(q,-b)} \\
&\qquad + [\alpha_{0,2}b^2 - q\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}b + \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1}]\eta_{(0)}^{(q+1,-b)} \\
&\qquad - [i\alpha_{1,1}b + i\alpha_{1,0}]\eta_{(0)}^{(q+2,-b)} \\
&\qquad - \alpha_{2,0}\eta_{(0)}^{(q+3,-b)}\} \\
&= H(q-2)\tfrac{i^{q-2}}{\sqrt{2\pi(q-2)!}}\alpha_{0,2}\eta_{(0)}^{(q-1,-b)} - H(q-1)\tfrac{i^{q-1}}{\sqrt{2\pi(q-1)!}}[2\alpha_{0,2}b + \alpha_{0,1}]\eta_{(0)}^{(q,-b)} \\
&\qquad + \tfrac{i^q}{\sqrt{2\pi q!}}[\alpha_{0,2}b^2 - q\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}b + \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1}]\eta_{(0)}^{(q+1,-b)} \\
&\qquad - \tfrac{i^{q+1}}{\sqrt{2\pi(q+1)!}}(q+1)[\alpha_{1,1}b + \alpha_{1,0}]\eta_{(0)}^{(q+2,-b)} \\
&\qquad + \tfrac{i^{q+2}}{\sqrt{2\pi(q+2)!}}(q+1)(q+2)\alpha_{2,0}\eta_{(0)}^{(q+3,-b)} \\
&= \mathcal{F}\{H(q-2)\alpha_{0,2}\eta^{(-q+2,b)} + H(q-1)[2\alpha_{0,2}b + \alpha_{0,1}]\eta^{(-q+1,b)} \\
&\qquad + [\alpha_{0,2}b^2 - q\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}b + \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1}]\eta^{(-q,b)} \\
&\qquad - (q+1)[\alpha_{1,1}b + \alpha_{1,0}]\eta^{(-q-1,b)} \\
&\qquad + (q+1)(q+2)\alpha_{2,0}\eta^{(-q-2,b)}\}
\end{aligned}
$$

□

We zien dat inderdaad geldt:

Stelling 2.2 *De ruimte* **GF** *is gesloten onder* $\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{X}, \mathcal{T}_a, \mathcal{E}_a$ *en* $\mathcal{S}_a$*, en dus ook onder* $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$*.* □

2.4 Een convergentie-begrip op GF, differentiëren binnen de ruimte GF

Omdat $\mathbf{GF} \subset S'(\mathbb{R})$, kunnen we op **GF** het volgende convergentie-begrip invoeren:

Definitie 2.6 We noemen een rij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{GF}$ (in **GF**-zin of zwak) *convergent* naar $u \in \mathbf{GF}$, dan en slechts dan als voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ geldt $\langle u_n, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$. □

Verder definiëren we, net als in $S'(\mathbb{R})$, diffentieerbaarheid:

Definitie 2.7 Een afbeelding $u(\alpha) : \mathbb{C} \to \mathbf{GF}$ heet *differentieerbaar* (in **GF**-zin) als voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ de afbeelding $\langle u(\alpha), \phi\rangle : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differentieerbaar is. We schrijven dan, voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$,

$$\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}u(\alpha), \phi\rangle = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\langle u(\alpha), \phi\rangle\ .$$

□

Deze definitie is in overeenstemming met het hierboven ingevoerde convergentiebegrip. De afbeeldingen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} : \mathbf{GF}_+ \to \mathbf{GF}$ en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} : \mathbf{GF}_+ \to \mathbf{GF}$ zijn continu.

Lemma 2.15 *Er geldt*

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} = -i\eta_{(\mu)}^{(p+2,\beta)}$$

Bewijs Er geldt, voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$, en voor $\beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\langle \eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}, \phi\rangle &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\int_{-\infty}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^p \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -ix^{p+1}\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \langle -i\eta_{(\mu)}^{(p+2,\beta)}, \phi\rangle\ ,
\end{aligned}$$

waarbij het verwisselen van integratie en limiet geoorlooft is: Als $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, dan, voor $|x| \to \infty$, $\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2} = O(\mathrm{e}^{-\mu x^2})$, dus de integrant wordt dan gemajoreerd door $Cx^p\mathrm{e}^{-\mu x^2}\overline{\phi(x)}$, voor zekere $C > 0$. Als $\mathrm{Re}(\mu) = 0$, dan is $\beta \in \mathbb{R}$. Een majorant is dan $x^p\overline{\phi(x)}$. Lebesgue's gemajoreerde convergentie stelling rechtvaardigt nu het verwisselen van de volgorde van integratie en limiet. We concluderen: $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}$ is differentieerbaar naar β en

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} = -i\eta_{(\mu)}^{(p+2,\beta)}\ .$$

□

Lemma 2.16 *Er geldt*

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} = -\eta_{(\mu)}^{(p+3,\beta)}\ .$$

Bewijs Er geldt, voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\langle \eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}, \phi\rangle &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\int_{-\infty}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^p \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -x^{p+2}\mathrm{e}^{-i\beta x-\mu x^2}\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x \\
&= \langle -\eta_{(\mu)}^{(p+3,\beta)}, \phi\rangle\ ,
\end{aligned}$$

waarbij, op dezelfde gronden als in het bewijs van lemma 2.15, het verwisselen van integratie en limiet geoorlooft is. We concluderen: $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}$ is differentieerbaar naar μ en

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} = -\eta_{(\mu)}^{(p+3,\beta)}\ .$$

Deze operator is continu. □

Merk op dat

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}|_{\mathbf{GF}_+} = -i\mathcal{X}|_{\mathbf{GF}_+}$$

en dat

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}|_{\mathbf{GF}_+} = -\mathcal{X}^2|_{\mathbf{GF}_+}$$

2.5 Oplossingen van het Cauchy-probleem in GF, uitgedrukt in oplossingen van een Cauchy-probleem in GF$_+$

We beschouwen nu de evolutievergelijking

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \mathcal{A}u(t) \tag{2.1}$$

Lemma 2.17 *Als $u(0) \in \mathbf{GF}$, zeg*

$$u(0) = \sum_{j=-p}^{p}\sum_{k=-p}^{p}\sum_{l=-p}^{p} \upsilon_{j,k,l}\eta^{(j,\alpha_k)}_{(\mu_l)} ,$$

en als $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = \mathcal{A}u$ een oplossing $u(t)$ heeft voor $t \in (t_0, t_1)$, met $-\infty \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq \infty$, dan is $u(t)$ te schrijven als

$$u(t) = \sum_{k=-p}^{p}\sum_{l=-p}^{p} u_{k,l}(t)$$

met $u_{k,l}(t)$ oplossing van

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{k,l}(t) &= \mathcal{A}u_{k,l}(t) \\ u_{k,l}(0) &= \sum_{j=-p}^{p} \upsilon_{j,k,l}\eta^{(j,\alpha_k)}_{(\mu_l)} . \end{aligned}$$

Bewijs Eenvoudig in te zien door de actie van $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ en $\mathcal{A}$ op $\eta^{(j,\alpha(t))}_{(\mu(t))}$ te beschouwen. □

Lemma 2.18 *Een $u(t) \in \mathbf{GF}$ is, voor $t \in (t_0, t_1)$, met $-\infty \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq \infty$, oplossing van*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= \mathcal{A}(\underline{\alpha})u(t) , \\ u(0) &= \sum_{j=0}^{p} \upsilon_j\eta^{(-j,b)} ; \end{aligned}$$

dan en slechts dan als $v(t) = \mathcal{F}u(t)$ voor $t \in (t_0, t_1)$ oplossing is van

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) &= \mathcal{A}(-\alpha_{0,2}, -\alpha_{1,1}, -i\alpha_{0,1}, -\alpha_{2,0}, -i\alpha_{1,0}, \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1})v(t) , \\ v(0) &= \sum_{j=0}^{p} \nu_j\eta^{(j+1,-b)} , \end{aligned}$$

met

$$\nu_j = \frac{i^j}{\sqrt{2\pi}j!}\upsilon_j .$$

Bewijs Met lemma 2.1 en 2.5 vinden we: Als

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_{j+1}(t)\eta^{(j+1,\beta(t))}_{(\mu(t))}$$

voldoet aan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = \mathcal{A}(\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0})u ,$$

dan voldoet $\mathcal{F}u$ aan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}u = \mathcal{A}(-\alpha_{0,2}, -\alpha_{1,1}, -i\alpha_{0,1}, -\alpha_{2,0}, -i\alpha_{1,0}, \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1})\mathcal{F}u .$$

De beginvoorwaarde voor $v(t)$ volgt met lemma 2.6. □

Zonder verlies van algemeenheid beperken we ons dus tot beginwaarde-problemen met

$$u(0) \quad = \quad \sum_{j=0}^{p} \upsilon_{j+1}\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} .$$

Schrijf nu $\mathbf{GF}_{\pm}(t)$ voor de verzameling eindige lineaire combinaties van continu differentieerbare afbeeldingen $(t_0, t_1) \to \mathbf{GF}$: $t \mapsto \eta_{(\mu(t))}^{(j,\beta(t))}$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, waar voor alle t geldt $\eta_{(\mu(t))}^{(j,\beta(t))} \in \mathbf{GF}_{\pm}$.

Lemma 2.19 *Er geldt*

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\mathbf{GF}_{+}(t) \subset \mathbf{GF}_{+}(t) , \\ &\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{GF}_{+}(t) \subset \mathbf{GF}_{+}(t) . \end{aligned}$$

Bewijs Er geldt, voor $u(t) \in \mathbf{GF}_{+}(t)$,

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \quad = \quad (\dot{\beta}(t)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} + \dot{\mu}(t)\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu})u(t) .$$

Het gestelde volgt nu met de lemmata 2.14, 2.15 en 2.16. □

2.6 Een oplossing van het Cauchy-probleem in de ruimte $\mathbf{GF}_{+}$

Inleiding

In deze paragraaf lossen we het Cauchy-probleem in $\mathbf{GF}_{+}$, en daarmee, volgens de resultaten van paragraaf 2.5, dat in $\mathbf{GF}$, op. Dit doen we als volgt:

In paragraaf 2.6.1 laat ik zien dat het Cauchy-probleem te vertalen is in een stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen. Eén van die differentiaalvergelijkingen zal een Ricatti-vergelijking zijn. In paragraaf 2.6.3 introduceer ik een 'singulariteitenverzameling', die een rol zal spelen bij het bepalen van nodige voorwaarden op de coëfficiënten $\underline{\alpha}$ en de beginconditie, opdat de oplossing van het Cauchy-probleem op een voldoende groot interval bestaat. Stelling 2.3, paragraaf 2.6.6 geeft de oplossing van het Cauchy-probleem in $\mathbf{GF}_{+}$.

2.6.1 Een stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen

Lemma 2.20 *Zij* A *golfachtig of diffusieachtig,* $n \in \mathbb{N}$ *en*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j(t)\eta_{(\mu(t))}^{(j+1,\beta(t))} .$$

met voor alle t: $\mathrm{Re}(\mu(t)) \geq 0$ *en, als voor zekere* t $\mathrm{Re}(\mu(t)) = 0$, *dan* $\beta(t) \in \mathbb{R}$. *Zij verder* $-\infty \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq \infty$, *met* $(t_1, t_2) \subset I_{\underline{\alpha}}$.

Dan geldt: $u(t)$ *voldoet aan de evolutievergelijking 2.1 in het gebied* (t_0, t_1), *dan en slechts dan als voor alle* $t \in (t_0, t_1)$ *geldt:*

$$\dot{\beta} \quad = \quad (\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu)\beta + i\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,0}\mu , \tag{2.2}$$

$$\dot{\mu} \quad = \quad -\alpha_{0,2} + 2\alpha_{1,1}\mu - 4\alpha_{2,0}\mu^2 , \tag{2.3}$$

terwijl voor de functies $\upsilon_j(t)$, $0 \leq j \leq n$ *geldt:*

$$\dot{\upsilon}_0 \quad = \quad (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)\upsilon_0 , \tag{2.4}$$

en, als $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \dot{\upsilon}_1 \quad = \quad & (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)\upsilon_1 \\ & + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)\upsilon_2 + 6\alpha_{2,0}\upsilon_3 ; \end{aligned} \tag{2.5}$$

als $n \geq 4$, $2 \leq j \leq n-2$:

$$\begin{aligned}\dot{v}_j &= (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_j \\ &\quad + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)v_{j+1} \\ &\quad + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}v_{j+2} \; ; \end{aligned} \tag{2.6}$$

als $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{n-1} &= ((n-1)\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2)v_{n-1} \\ &\quad + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n \; ; \end{aligned} \tag{2.7}$$

terwijl

$$\dot{v}_n = (n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_n \, . \tag{2.8}$$

Bewijs De lemmata 2.17 en 2.19 rechtvaardigen de keuze voor een Ansatz van de vorm $u(t)$. We beschouwen $\mathcal{A}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}$. Er geldt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} &= p(p-1)\alpha_{2,0}\eta_{(\mu)}^{(p-1,\beta)} + [-2ip\alpha_{2,0}\beta + p\alpha_{1,0}]\eta_{(\mu)}^{(p,\beta)} \\ &\quad + [-\alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2p+1)\alpha_{2,0}\mu + p\alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)} \\ &\quad + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta_{(\mu)}^{(p+2,\beta)} \\ &\quad + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta_{(\mu)}^{(p+3,\beta)}\end{aligned}$$

Anderzijds geldt, met lemmata 2.15 en 2.16,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} = -i\dot{\beta}\eta_{(\mu)}^{(j+2,\beta)} - \dot{\mu}\eta_{(\mu)}^{(j+3,\beta)} \, .$$

Zij nu $n \geq 4$. Dan vinden we voor $\mathcal{A}u$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u &= \sum_{j=0}^{n}\{j(j-1)\alpha_{2,0}\eta_{(\mu)}^{(j-1,\beta)} + [-2ij\alpha_{2,0}\beta + j\alpha_{1,0}]\eta_{(\mu)}^{(j,\beta)} \\ &\quad + [-2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2 + j\alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} \\ &\quad + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta_{(\mu)}^{(j+2,\beta)} \\ &\quad + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta_{(\mu)}^{(j+3,\beta)}]\}v_j \; ;\end{aligned}$$

een som van $\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$'s. De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(1,\beta)}$ is

$$(\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2\alpha_{2,0}\mu)v_0 + (-2i\alpha_{2,0}\beta + \alpha_{1,0})v_1 + 2\alpha_{2,0}v_2 \, .$$

De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(2,\beta)}$ is

$$\begin{aligned}&(\alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_0 + (\alpha_{0,0} + \alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_1 \\ &\quad + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)v_2 + 6\alpha_{2,0}v_3 \, .\end{aligned}$$

De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$, $2 \leq j \leq n-2$ is

$$\begin{aligned}&(\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{j-2} + (-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1})v_{j-1} \\ &\quad + (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu)v_j \\ &\quad + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)v_{j+1} \\ &\quad + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}v_{j+2} \, .\end{aligned}$$

De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n,\beta)}$ is

$$(4\alpha_{2,0}\mu^2 + \alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu)v_{n-3} + (\alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_{n-2}$$
$$+ ((n-1)\alpha_{1,1} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2)v_{n-1}$$
$$+ (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n\ .$$

De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n+1,\beta)}$ is

$$(\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-2} + (-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1})v_{n-1}$$
$$+ (n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu)v_n\ .$$

De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n+2,\beta)}$ is

$$(\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-1} + (-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1})v_n\ .$$

De coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n+3,\beta)}$ is

$$(\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_n\ .$$

Anderzijds vinden we voor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \dot{v}_0\eta_{(\mu)}^{(1,\beta)} + [\dot{v}_1 - i\dot{\beta}v_0]\eta_{(\mu)}^{(2,\beta)} + \sum_{j=2}^{n}[\dot{v}_j - i\dot{\beta}v_{j-1} - \dot{\mu}v_{j-2}]\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} \\ &\quad + [-i\dot{\beta}v_n - \dot{\mu}v_{n-1}]\eta_{(\mu)}^{(n+2,\beta)} - \dot{\mu}v_n\eta_{(\mu)}^{(n+3,\beta)}\ .\end{aligned}$$

Gelijkstellen van de coëfficienten geeft de volgende $n+3$ vergelijkingen voor de $n+3$ variabelen $v_0 \ldots v_n$ en β, μ:

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_0 \\ &\quad + (\alpha_{1,0} - 2i\alpha_{2,0}\beta)v_1 + 2\alpha_{2,0}v_2\ ,\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= (i\dot{\beta} + \alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_0 \\ &\quad + (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_1 \\ &\quad + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)v_2 + 6\alpha_{2,0}v_3\ ,\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_j &= (\dot{\mu} + \alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{j-2} \\ &\quad + (i\dot{\beta} + \alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_{j-1} \\ &\quad + (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_j \\ &\quad + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)v_{j+1} \\ &\quad + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}v_{j+2} \qquad 2 \le j \le n-2\ ,\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_{n-1} &= (\dot{\mu} + \alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-3} \\ &\quad + (i\dot{\beta} + \alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_{n-2} \\ &\quad + ((n-1)\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2)v_{n-1} \\ &\quad + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n\ ,\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_n &= (\dot{\mu} + \alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-2} \\ &\quad + (i\dot{\beta} + \alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_{n-1} \\ &\quad + (n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_n\ ,\end{aligned} \tag{2.13}$$

en

$$\begin{aligned} -i\dot{\beta}v_n - \dot{\mu}v_{n-1} &= (\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-1} \\ &\quad + (\alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_n\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$-\dot{\mu}v_n = (\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_n\,. \tag{2.15}$$

Zij nu $u(t)$ zodanig dat voldaan is aan de vergelijkingen 2.3, 2.2 en 2.4 tot en met 2.8. Dan volgt vergelijking 2.15 uit de vergelijking 2.3. Substitutie van vergelijking 2.15 in vergelijking 2.14 geeft

$$\begin{aligned} -i\dot{\beta} &= \alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu \\ \dot{\beta} &= (\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu)\beta + i\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,0}\mu\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dit is vergelijking 2.2. De differentiaalvergelijkingen voor $v_j(t)$ geven de overige vergelijkingen. Immers: Substitutie van vergelijking 2.16 in 2.10:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_1 \\ &\quad + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)v_2 + 6\alpha_{2,0}v_3\,, \end{aligned} \tag{2.17}$$

Substitutie van de vergelijkingen 2.15 en 2.16 in vergelijking 2.11 geeft:

$$\begin{aligned} \dot{v}_j &= (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_j \\ &\quad + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)v_{j+1} \\ &\quad + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}v_{j+2} \qquad 2 \le j \le n-2\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Substitutie van de vergelijkingen 2.15 en 2.16 in vergelijking 2.12 geeft:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{n-1} &= ((n-1)\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2)v_{n-1} \\ &\quad + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n\,, \end{aligned}$$

Substitutie van de vergelijkingen 2.15 en 2.16 in vergelijking 2.13 geeft:

$$\dot{v}_n = (n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_n\,. \tag{2.19}$$

Vervolgens beschouwen we de gevallen waarin $n < 4$. Als $n = 0$, dan vinden we voor $\mathcal{A}u$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= \{[-\alpha_{2,0}\beta^2 - 2\alpha_{2,0}\mu - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta^{(1,\beta)}_{(\mu)} \\ &\quad + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta^{(2,\beta)}_{(\mu)} \\ &\quad + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta^{(3,\beta)}_{(\mu)}\}v_0\,. \end{aligned}$$

Anderzijds vinden we voor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = \dot{v}_0\eta^{(1,\beta)}_{(\mu)} - i\dot{\beta}v_0\eta^{(2,\beta)}_{(\mu)} - \dot{\mu}v_0\eta^{(3,\beta)}_{(\mu)}\,.$$

Gelijkstellen van de coëfficiënten van $\eta^{(1,\beta)}_{(\mu)}$, $\eta^{(2,\beta)}_{(\mu)}$ en $\eta^{(3,\beta)}_{(\mu)}$ geeft nu de vergelijkingen 2.2, 2.3 en 2.4.

Als $n = 1$, dan vinden we op dezelfde manier de vergelijkingen 2.2, 2.3, 2.4 en 2.8. Als $n = 2$, vinden we de vergelijkingen 2.2, 2.3, 2.4, 2.7 en 2.8. Als $n = 3$, vinden we de vergelijkingen 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.7 en 2.8.

Met de éénduidigheidsstelling 1.11 volgt dat het stelsel differentiaalvergelijkingen niet alleen een voldoende, maar ook een nodige voorwaarde geeft voor de oplossing van de evolutievergelijking. □

2.6.2 De functie $\mu(t)$

We bepalen de functie $\mu(t)$.

Lemma 2.21 *Beschouw de differentiaalvergelijking 2.3:*

$$\dot{\mu} = -\alpha_{0,2} + 2\alpha_{1,1}\mu - 4\alpha_{2,0}\mu^2 .$$

We schrijven $\omega := \sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}$, *waar* $\sqrt{\cdot}$ *op* $\mathbb{C}$ *gedefinieerd is als in de inleiding van dit hoofdstuk. We schrijven verder* $\mu_+ := \frac{\alpha_{1,1}+\omega}{4\alpha_{2,0}}$ *en* $\mu_- := \frac{\alpha_{1,1}-\omega}{4\alpha_{2,0}}$.

Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = 0$, *dan is de functie*

$$\mu(t) = -\alpha_{0,2}t + \mu(0)$$

oplossing van de differentiaalvergelijking in het gebied $\mathbb{R}$.

Als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, *dan is de functie*

$$\mu(t) = \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}} + (\mu(0) - \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}})\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t}$$

oplossing van de differentiaalvergelijking in het gebied $\mathbb{R}$.

Voor $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\mu(0) = \mu_+$ *is de functie*

$$\mu(t) = \mu_+$$

oplossing van de differentiaalvergelijking in het gebied $\mathbb{R}$. *Voor* $\mu(0) = \mu_-$ *is de functie*

$$\mu(t) = \mu_-$$

oplossing van de differentiaalvergelijking in het gebied $\mathbb{R}$.

Zij nu $\mu(0) \neq \mu_+$ *en* $\mu(0) \neq \mu_-$. *Als nu* $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, *dan is de functie*

$$\mu(t) = \frac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} + \frac{4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}(4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1})t + 4\alpha_{2,0}}$$

oplossing van de differentiaalvergelijking in het gebied $(-|\frac{1}{\alpha_{1,1}-4\alpha_{2,0}\mu(0)}|, |\frac{1}{\alpha_{1,1}-4\alpha_{2,0}\mu(0)}|)$.

Als laatste beschouwen we het geval $\mu(0) \neq \mu_+$, $\mu(0) \neq \mu_-$, $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$. *We definiëren de hoofdwaarde van de logaritme: voor alle* $z \in \mathbb{C}$, $\log z := \log|z| + i\arg z$, $-\pi < \arg z \leq \pi$. *We schrijven verder* $\lambda_0 := \frac{\omega}{\mu_+ - \mu(0)}$. *De functie*

$$\mu(t) = \mu_+ - \frac{\omega}{2\alpha_{2,0} + (\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t}}$$

is nu oplossing van de differentiaalvergelijking in het gebied $(-t_0, t_0)$, *met*

$$t_0 := \min_{k\in\mathbb{Z}} |\tfrac{1}{2\omega}(\log \frac{2\alpha_{2,0}}{2\alpha_{2,0} - \lambda_0} + 2\pi i k)| .$$

Bewijs We beschouwen vergelijking 2.3:

$$\dot{\mu} = -\alpha_{0,2} + 2\alpha_{1,1}\mu - 4\alpha_{2,0}\mu^2$$

eerst voor $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = 0$. De vergelijking heeft dan de oplossing

$$\mu(t) = -\alpha_{0,2}t + \mu(0) .$$

Als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, dan luidt de vergelijking

$$\dot{\mu} = -\alpha_{0,2} + 2\alpha_{1,1}\mu$$

met oplossing

$$\mu(t) = \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}} + (\mu(0) - \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}})\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} .$$

Zij nu $\alpha_{2,0} \neq 0$. Vergelijking 2.3 is nu een Ricatti-vergelijking voor $\mu(t)$. De algemene oplossing voor deze vergelijking is te vinden door te zoeken naar een Ansatz van de vorm $\mu(t) = \mu_+(t) + \frac{1}{\nu(t)}$, waarbij $\mu_+(t)$ zekere particuliere oplossing is. We zien meteen dat de vergelijking een particuliere oplossing $\mu_\pm(t) \equiv \mu_\pm$ heeft, met

$$4\alpha_{2,0}\mu_\pm^2 - 2\alpha_{1,1}\mu_\pm + \alpha_{0,2} = 0\,.$$

I.e.

$$\mu_\pm = \tfrac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} \pm \tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}\sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}$$

We kiezen

$$\mu_+ := \tfrac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} + \tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}\sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}$$

Zij nu $\mu(0) \neq \mu_+$, $\mu(0) \neq \mu_-$. Substitutie van

$$\mu(t) = \mu_+ + \frac{1}{\nu(t)}$$

in

$$\dot\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2} = 0$$

geeft voor $\nu(t)$ de lineaire differentiaal-vergelijking

$$\dot\nu + (2\alpha_{1,1} - 8\alpha_{2,0}\mu_+)\nu - 4\alpha_{2,0} \quad = \quad 0\,. \tag{2.20}$$

In het geval dat $\alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, dat wil zeggen $2\alpha_{1,1} - 8\alpha_{2,0}\mu_+ = 0$, heeft deze differentiaalvergelijking de oplossing

$$\nu(t) = 4\alpha_{2,0}t + \nu(0)\,.$$

Dit betekent voor $\mu(t)$:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \mu_+ + \frac{1}{4\alpha_{2,0}t + \nu(0)}\\ &= \frac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} + \frac{4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}t(4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}) + 4\alpha_{2,0}}\,,\end{aligned}$$

met $t \neq \frac{1}{\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu(0)}$. (Bedenk dat $\mu(0) \neq \mu_+ = \frac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}}$.)

In het geval dat $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$ heeft differentiaalvergelijking 2.20 de oplossing

$$\begin{aligned}\nu(t) &= \tfrac{2\alpha_{2,0}}{\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu_+} + (\nu(0) - \tfrac{2\alpha_{2,0}}{\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu_+})\mathrm{e}^{(8\alpha_{2,0}\mu_+ - 2\alpha_{1,1})t}\\ &= -\tfrac{2\alpha_{2,0}}{\omega} + (\nu(0) + \tfrac{2\alpha_{2,0}}{\omega})\mathrm{e}^{2\omega t}\,,\end{aligned}$$

waar $\omega := \sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}$. Voor $\mu(t)$ betekent dit, met $\lambda_0 := -\frac{\omega}{\mu(0) - \mu_+}$,

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \mu_+ - \frac{\omega}{2\alpha_{2,0} - (\omega\nu(0) + 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t}}\\ &= \mu_+ - \frac{\omega(\mu(0) - \mu_+)}{2\alpha_{2,0}(\mu(0) - \mu_+) - [\omega + 2\alpha_{2,0}(\mu(0) - \mu_+)]\mathrm{e}^{2\omega t}}\\ &= \mu_+ - \frac{\omega}{2\alpha_{2,0} + (\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t}}\,.\end{aligned} \tag{2.21}$$

□

Het bovenstaande lemma leert nu:

Lemma 2.22 *Voor alle $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^6$, en voor alle $\mu(0) \in \mathbb{C}$, zijn er getallen $t_0 < 0$ en $t_1 > 0$ zodat $\mu(t)$ op (t_0, t_1) aan de Ricatti-vergelijking 2.3 voldoet.* □

2.6.3 De singulariteitenverzameling S

We voeren een singulariteitenverzameling $S(\underline{\alpha}, \mu(0))$ in. Deze zal later een rol spelen bij het bepalen van het definitiegebied van de oplossing van het stelsel gewone differentiaalvergelijkingen.

Definitie 2.8 We definiëren, voor $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^6$, en $\mu(0) \in \mathbb{C}$, de *singulariteitenverzameling* $S = S(\underline{\alpha}, \mu(0)) \subset \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & S(\underline{\alpha}, \mu(0)) \\ & := \begin{cases} \emptyset & \text{als òf } \alpha_{2,0} \neq 0 \text{ en } \mu(0) = \mu_{\pm}, \text{ òf } \alpha_{2,0} = 0 \\ \{\frac{1}{\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu(0)}\} & \text{als } \mu(0) \neq \mu_{\pm}, \text{ terwijl } \alpha_{2,0} \neq 0 \text{ en } \alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}, \\ \{s_k \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{als } \mu(0) \neq \mu_{\pm}, \ \alpha_{2,0} \neq 0, \ \alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} \end{cases} \end{aligned}$$

met

$$s_k \ := \ \tfrac{1}{2\omega}(\log(\frac{2\alpha_{2,0}}{2\alpha_{2,0} - \lambda_0}) + 2\pi i k) \, .$$

In het eerste, tweede, respektievelijk derde geval noemen we de verzameling S van *type één*, *type twee*, respektievelijk *type drie*. □

Merk op: Als S van type drie is, dan is S de verzameling van nulpunten van

$$(\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t} + 2\alpha_{2,0} \, ,$$

$t \in \mathbb{C}$. De verzameling S is dan ook te karakteriseren als de verzameling nulpunten $t \in \mathbb{C}$ van

$$\mu(0) - \tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}(\alpha_{1,1} + \omega - \frac{2\omega}{1 - \mathrm{e}^{-2\omega t}}) \, .$$

Ter herinnering: We gebruiken de afkortingen

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}} \\ \mu_+ &= \frac{\alpha_{1,1} + \omega}{4\alpha_{2,0}} \\ \mu_- &= \frac{\alpha_{1,1} - \omega}{4\alpha_{2,0}} \\ \lambda_0 &= \frac{\omega}{\mu_+ - \mu(0)} \, . \end{aligned}$$

We zoeken (zo zwak mogelijke) voorwaarden op $\underline{\alpha}$, zodanig dat $S(\underline{\alpha}, \mu(0))$ voor alle $\mu(0)$ met $\mathrm{Re}(\mu(0)) \geq 0$ geen punten gemeen heeft met een zeker interval (t_0, t_1). We proberen daarbij het interval (t_0, t_1) zo groot mogelijk te praten (bijvoorbeeld gelijk aan $I_{\underline{\alpha}}$). We beschouwen $\underline{\alpha}$ met A golfachtig en $\underline{\alpha}$ met A diffusieachtig.

De verzameling S met A golfachtig

Zij A golfachtig, i.e. $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,1}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,1}) = 0$. Dan is $I_{\underline{\alpha}} = \mathbb{R}$. We schrijven $\alpha_{2,0} = iy_{2,0}, \alpha_{1,1} = x_{1,1}, \alpha_{0,2} = iy_{0,2}$, met $y_{2,0}, x_{1,1}, y_{0,2} \in \mathbb{R}$.

Triviaal is:

Lemma 2.23 *Als $\alpha_{2,0} \neq 0$ en $\mu(0) = \mu_{\pm}$, of $\alpha_{2,0} = 0$, dan geldt $S \cap I_{\underline{\alpha}} = \emptyset$.* □

Lemma 2.24 *Als A golfachtig is, en $x_{1,1}^2 < -2y_{2,0}y_{0,2}$, terwijl $\mu(0) = 0$, dan is $\omega = iw$, met $w > 0$, en, voor alle $K \in \mathbb{Z}$, $S \cap [(K - \frac{1}{4})\frac{\pi}{w}, (K + \frac{1}{4})\frac{\pi}{w}] = \emptyset$.*

Bewijs Omdat $x_{1,1}^2 < -2y_{2,0}y_{0,2}$, is ook $x_{1,1}^2 < -4y_{2,0}y_{0,2}$, en $y_{2,0} \neq 0$, dus $\alpha_{2,0} \neq 0$ en $\alpha_{1,1}^2 < 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$. Dit geeft $\omega = iw$, $w > 0$. Er geldt $\mathrm{Re}(\mu_\pm) = \mathrm{Re}(\frac{x_{1,1} \pm iw}{4iy_{2,0}}) \neq 0 = \mathrm{Re}(\mu(0))$. Dus S is van type drie.

Zij nu $K \in \mathbb{Z}$ en $t \in [(K - \frac{1}{4})\frac{\pi}{w}, (K + \frac{1}{4})\frac{\pi}{w}]$. Dan $\mathrm{e}^{-2\omega t} \in \{\mathrm{e}^{i\phi} \mid -\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi\}$. Nu geldt, (zie ook [K, 4.2, p. 11]),

$$\begin{aligned}\{\frac{2}{1+z} \mid |z| = 1, z \neq -1\} &= \{w \mid |\frac{2-w}{w}| = 1, w \neq 0\} \\ &= \{w \mid \mathrm{Re}(w) = 1, w \neq 0\}\,,\end{aligned}$$

en dus

$$\{\frac{2}{1-\mathrm{e}^{i\phi}} \mid -\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi\} = \{w \mid \mathrm{Re}(w) = 1, |\mathrm{Im}(w)| \geq 1\}\,.$$

Dit geeft, voor $t \neq 0$, $\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}} \in \{1 + ia \mid a \in \mathbb{R}, |a| \geq 1\}$. Zij $t \neq 0$ en schrijf $\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}} = 1 + ia(t)$. Dan vinden we

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\omega(1 - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}})) &= -w\mathrm{Im}(1 - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}}) \\ &= wa(t)\,.\end{aligned}$$

Nu geldt $|wa(t)| > |x_{1,1}|$, immers $x_{1,1}^2 < -2y_{2,0}y_{0,2}$ dus $x_{1,1}^2 < -x_{1,1}^2 - 4y_{2,0}y_{0,2} = w^2$, en dus

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\alpha_{1,1} + \omega(1 - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}})) &= x_{1,1} + wa(t) \\ &\neq 0\,.\end{aligned}$$

We vinden

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}(\alpha_{1,1} + \omega - \frac{2\omega}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}}) &\neq 0 \\ &= \mu(0)\,.\end{aligned}$$

Dit betekent: $t \notin S$. Als $t = 0$, dan

$$(\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t} + 2\alpha_{2,0} = \lambda_0 \neq 0\,,$$

dus ook dan geldt: $t \notin S$. Dus $S \cap [(K - \frac{1}{4})\frac{\pi}{w}, (K + \frac{1}{4})\frac{\pi}{w}] = \emptyset$. □

Lemma 2.25 *Als* A *golfachtig is, en* $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 < 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, *terwijl* $\mathrm{Re}(4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}) > 0$ *dan is* $\omega = iw$, *met* $w > 0$, *en, voor alle* $K \in \mathbb{Z}$, $S \cap [K\frac{\pi}{w}, (K + \frac{1}{2})\frac{\pi}{w}] = \emptyset$.

Bewijs Omdat $\alpha_{1,1}^2 < 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$ is $\omega = iw$, $w > 0$. Er geldt $\mathrm{Re}(\mu_\pm) = \mathrm{Re}(\frac{x_{1,1} \pm iw}{4iy_{2,0}}) \neq 0 = \mathrm{Re}(\mu(0))$. Dus S is van type drie.

Zij nu $K \in \mathbb{Z}$ en $t \in [K\frac{\pi}{w}, (K + \frac{1}{2})\frac{\pi}{w}]$. Dan $\mathrm{e}^{-2\omega t} \in \{\mathrm{e}^{i\phi} \mid -\pi \leq \phi \leq 0\}$ en, voor $t \neq 0$, $\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}} \in \{1 - ia \mid a \geq 0\}$. Schrijf $\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}} = 1 - ia(t)$. Dan vinden we

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\omega(1 - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}})) &= -w\mathrm{Im}(1 - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}}) \\ &= -wa(t) \\ &\leq 0\,.\end{aligned}$$

Nu geldt $\mathrm{Re}(4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}) > 0$, dus

$$\omega(1 - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-2\omega t}}) \neq 4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}\,.$$

Dit betekent: $t \notin S$. Als $t = 0$, dan

$$(\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t} + 2\alpha_{2,0} = \lambda_0 \neq 0\,,$$

dus ook dan: $t \notin S$. Dus $S \cap [K\frac{\pi}{w}, (K + \frac{1}{2})\frac{\pi}{w}] = \emptyset$. □

De verzameling S met A diffusieachtig

Vervolgens beschouwen we S met A diffusie-achtig, i.e. $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) \geq \delta$, $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq -\delta$ en $|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| \leq 2\delta - \epsilon$. Er geldt dan $\alpha_{2,0} \neq 0$.

Triviaal is:

Lemma 2.26 *Als* A *diffusieachtig en* $\mu(0) = \mu_+$, *of* $\mu(0) = \mu_-$, *dan geldt* $S \cap I_{\underline{\alpha}} = \emptyset$. □

Lemma 2.27 *Als* A *diffusieachtig is,* $\alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, $\mathrm{Im}(\alpha_{2,0}) = 0$ *en* $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1}) < 0$, *terwijl* $\mathrm{Re}(\mu(0)) \geq 0$, $\mu(0) \neq \mu_\pm$ *dan geldt* $S \cap I_{\underline{\alpha}} = \emptyset$.

Bewijs Er geldt: S is van type twee en

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu(0)) &< -4\mathrm{Re}(\alpha_{2,0})\mathrm{Re}(\mu(0)) + 4\mathrm{Im}(\alpha_{2,0})\mathrm{Im}(\mu(0)) \\ &\leq 0\,, \end{aligned}$$

dus $S \cap I_{\underline{\alpha}} = \emptyset$. □

Lemma 2.28 *Als* A *diffusieachtig is, en* $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{1,1}$ *en* $\alpha_{0,2}$ *alle zuiver reëel zijn, terwijl* $\mathrm{Re}(\mu(0)) \geq 0$, *dan geldt:* $S \cap I_{\underline{\alpha}} = \emptyset$.

Bewijs Er geldt $\alpha_{2,0} > 0$ en $\alpha_{0,2} < 0$. Verder geldt $\alpha_{1,1}^2 \geq 0 > 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, dus S is van type drie, en $0 \leq |\alpha_{1,1}| < \omega$. Verder

$$\begin{aligned} \mu_+ - \tfrac{\omega}{2\alpha_{2,0}} &= \tfrac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} - \tfrac{\omega}{4\alpha_{2,0}} \\ &< 0 \\ &\leq \mathrm{Re}(\mu(0))\,, \end{aligned}$$

i.e. $\mu_+ - \mathrm{Re}(\mu(0)) < \frac{\omega}{2\alpha_{2,0}}$, dus, omdat $\lambda_0 := \frac{\omega}{\mu_+ - \mu(0)}$, geldt: $\mathrm{Re}(\lambda_0) - 2\alpha_{2,0} < -2\alpha_{2,0}$ òf $\mathrm{Re}(\lambda_0) - 2\alpha_{2,0} > 0$. Omdat nu $\mathrm{e}^{2\omega t} \geq 1$ voor $t \geq 0$, geldt dat $S \cap I_{\underline{\alpha}} = \emptyset$. □

2.6.4 Het existentie-interval en de functie $\mu(t)$ op haar maximale domein

Zij nu $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^6$ en $\mu(0), \beta(0) \in \mathbb{C}$, met òf $\mathrm{Re}(\mu(0)) = 0$ en $\mathrm{Im}(\beta(0)) = 0$, òf $\mathrm{Re}(\mu(0)) > 0$. Zij verder $n \in \mathbb{N}$, $v_j(0) \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$. We definiëren het existentie-interval (t_0, t_1):

Definitie 2.9 We definiëren

$$\begin{aligned} t_0 &:= \inf\{t \in \mathbb{R} \mid (t, 0] \cap S(\underline{\alpha}, \mu(0)) = \emptyset\}\,, \\ t_1 &:= \sup\{t \in \mathbb{R} \mid [0, t) \cap S(\underline{\alpha}, \mu(0)) = \emptyset\}\,. \end{aligned}$$

□

Met lemma 2.22 volgt dat $t_1 - t_0 > 0$, dus dat $(t_0, t_1) \neq \emptyset$. We definiëren de functie $\mu(t)$:

Definitie 2.10 We definiëren, afhankelijk van $\underline{\alpha}$ en $\mu(0)$, de functie $\mu(t) : (t_0, t_1) \to \mathbb{C}$: Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = 0$, dan

$$\mu(t) := -\alpha_{0,2}t + \mu(0)$$

Als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, dan

$$\mu(t) := \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}} + (\mu(0) - \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}})\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t}$$

Voor $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\mu(0) = \mu_\pm$:

$$\mu(t) := \mu_\pm$$

Als $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, terwijl $\mu(0) \neq \mu_+$ en $\mu(0) \neq \mu_-$, dan

$$\mu(t) := \frac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} + \frac{4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}(4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1})t + 4\alpha_{2,0}}$$

Als $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, $\mu(0) \neq \mu_+$, $\mu(0) \neq \mu_-$, dan:

$$\mu(t) := \mu_+ - \frac{\omega}{2\alpha_{2,0} + (\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})e^{2\omega t}} .$$

$\square$

Met de definitie's van (t_0, t_1) en S is eenvoudig in te zien dat de aldus gedefinieerde functie $\mu(t)$ inderdaad (t_0, t_1) in $\mathbb{C}$ afbeeldt. Verder geldt: $\mu(t) \in C'((t_0, t_1), \mathbb{C})$. Met lemma 2.21 volgt dat $\mu(t)$ in (t_0, t_1) aan de differentiaalvergelijking 2.3:

$$\dot{\mu} = -\alpha_{0,2} + 2\alpha_{1,1}\mu - 4\alpha_{2,0}\mu^2$$

voldoet.

2.6.5 De functie $\beta(t)$ en de overige coëfficiënten

Een beginwaardeprobleem

Lemma 2.29 *Beschouw het beginwaardeprobleem*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha(t)z + \beta(t) , \\ z(0) &= z_0 . \end{aligned}$$

Als $\alpha(t), \beta(t) \in C((t_0, t_1), \mathbb{C})$ voor zekere $-\infty \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq \infty$, dan heeft dit beginwaardeprobleem precies één oplossing $z(t) \in C'((t_0, t_1), \mathbb{C})$.

Bewijs Als het beginwaardeprobleem oplosbaar is, dan voldoet de functie

$$z_h(t) = C \exp[\int_0^t \alpha(\tau)d\tau]$$

aan de homogene differentiaalvergelijking. Wanneer we de functie

$$z(t) = C(t) \exp[\int_0^t \alpha(\tau)d\tau]$$

beschouwen, vinden we dat

$$z(t) = (z_0 + \int_0^t \beta(\tau) \exp[-\int_0^\tau \alpha(\theta)d\theta]d\tau) \exp[\int_0^t \alpha(\tau)d\tau]$$

de oplossing moet zijn van het beginwaardeprobleem. De voorwaarden $\alpha(t), \beta(t) \in C((t_0, t_1), \mathbb{C})$ zijn voldoende voor het bestaan van deze uitdrukking voor alle $t \in (t_0, t_1)$. Verder zien we dat $z(t) \in C'((t_0, t_1), \mathbb{C})$. $\square$

De definitie van de functie $\beta(t)$ en de overige coëfficiënten

Lemma 2.30 *Beschouw, voor $t \in \mathbb{R}$, de differentiaalvergelijking 2.2:*

$$\dot{\beta} = (\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu)\beta + i\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,0}\mu ,$$

en het stelsel 2.4 tot en met 2.8 van lineaire gewone eerste orde differentiaalvergelijkingen voor de functies $v_j(t)$, $0 \leq j \leq n$:

$$\dot{v}_0 = (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_0 ,$$

en, als $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = &(\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_1 \\ &+ (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)v_2 + 6\alpha_{2,0}v_3 ; \end{aligned}$$

als $n \geq 4$, $2 \leq j \leq n-2$:

$$\begin{aligned}\dot{v}_j &= (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_j \\ &\quad + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)v_{j+1} \\ &\quad + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}v_{j+2} \ ;\end{aligned}$$

als $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{n-1} &= ((n-1)\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2)v_{n-1} \\ &\quad + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n \ ;\end{aligned}$$

terwijl

$$\dot{v}_n = (n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_n \ .$$

De differentiaalvergelijking voor $\beta(t)$, en zoals zal blijken, dus ook het stelsel voor $v_j(t)$, heeft een éénduidige oplossing in het gebied (t_0, t_1).

Bewijs De bewering volgt direct uit lemma 2.29: Immers, differentiaalvergelijking 2.2 is van de juiste vorm, en het beginwaardeprobleem voor β heeft dus een oplossing $\beta(t) \in C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$. Substitutie van deze oplossing in vergelijking 2.8 geeft een $v_n(t) \in C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$. Substitutie in vergelijking 2.7 geeft $v_{n-1}(t) \in C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$. Substitutie in 2.6, met $j = n-2$, geeft $v_{n-2}(t) \in C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$. Successieve substitutie geeft nu $v_j(t) \in C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$, $2 \leq j \leq n-3$. De vergelijkingen 2.5 en 2.4 tenslotte, geven $v_1(t)$ en $v_0(t) \in C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$. □

We definiëren:

Definitie 2.11 We definiëren de $C'((t_0,t_1),\mathbb{C})$-functies $\beta(t)$ en $v_j(t)$, $0 \leq j \leq n$, als de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen 2.2 en 2.4 tot en met 2.8. Volgens lemma 2.30 is deze definitie zinvol. □

Een fikse rekenpartij leert het volgende over de functie $\beta(t)$: Voor $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = 0$ is

$$\beta(t) = i\alpha_{0,2}\alpha_{1,0}t^2 + i(\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\mu(0))t + \beta(0) \ .$$

Voor $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$ is

$$\beta(t) = b_0 + [\beta(0) - b_0 - b_1]\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + b_1\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t}$$

met

$$\begin{aligned}b_0 &= \tfrac{i}{\alpha_{1,1}^2}(\alpha_{0,1}\alpha_{1,1} - \alpha_{0,2}\alpha_{1,0}) \ , \\ b_1 &= \tfrac{2i\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}(\tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}} - \mu(0)) \ .\end{aligned}$$

Voor $\mu(0) = \mu_+$ en $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, $\alpha_{2,0} \neq 0$, is

$$\beta(t) = -\tfrac{1}{\omega}(i\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,0}\mu_+)(\mathrm{e}^{-\omega t} - 1) + \beta(0)\mathrm{e}^{-\omega t} \ .$$

Voor $\mu(0) = \mu_+$ en $\alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, $\alpha_{2,0} \neq 0$ is

$$\beta(t) = (i\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,0}\mu_+)t + \beta(0) \ .$$

Voor $\mu(0) \neq \mu_+$ en $\alpha_{1,1}^2 = 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, $\alpha_{2,0} \neq 0$ is

$$\beta(t) = \frac{(2\alpha_{2,0}\mu(0) - \frac{\alpha_{1,1}}{2})(i\alpha_{0,1} - \frac{i\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}}{2\alpha_{2,0}})t^2 + (i\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,0}\mu(0))t + \beta(0)}{1 + (4\alpha_{2,0}\mu(0) - \alpha_{1,1})t} \ .$$

Als $\mu(0) \neq \mu_+$, $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$, $\alpha_{2,0} \neq 0$, dan is

$$\beta(t) = \frac{\beta_0 + \beta_1\mathrm{e}^{\omega t} + \beta_2\mathrm{e}^{2\omega t}}{-\omega(2\alpha_{2,0} + (\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t})} \ ,$$

waar

$$\begin{aligned}\beta_0 &:= 2i\alpha_{2,0}\alpha_{0,1} - 2i\alpha_{1,1}\alpha_{1,0} + 4i\alpha_{2,0}\alpha_{1,0}\mu_+ \\ \beta_1 &:= 2i\alpha_{1,1}\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\alpha_{0,1} + i\lambda_0(\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\mu_+) - \omega\lambda_0\beta(0) \\ \beta_2 &:= -i(\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})(\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\mu_+) \ .\end{aligned}$$

2.6.6 De oplossing van het Cauchy-probleem in $\mathbf{GF}_+$

Stelling 2.3 *Zij $\mathcal{A}$ golfachtig of diffusieachtig en $\mu(t)$, $\beta(t)$ en $\upsilon_j(t)$ als in de definities 2.10 en 2.11. Dan is, voor $t \in (t_0, t_1)$,*

$$u(t) := \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j(t)\eta_{(\mu(t))}^{(j+1,\beta(t))}$$

in **GF** *en $u(t)$ is oplossing van het Cauchy-probleem*

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= \mathcal{A}u(t) \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

met

$$\phi = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j(0)\eta_{(\mu(0))}^{(j+1,\beta(0))} .$$

Bewijs Als voor zekere t $\mathrm{Re}(\mu(t)) < 0$ of èn $\mathrm{Re}(\mu(t)) = 0$ èn $\mathrm{Im}(\beta(t)) \neq 0$, dan $x^j \mathrm{e}^{-i\beta x - \mu x^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, immers, $x^j \mathrm{e}^{-i\beta x - \mu x^2}$ is dan niet polynomiaal begrensd. Dit is in tegenspraak met de stelling 1.11 uit hoofdstuk 1. Dus, voor alle $t \in (t_0, t_1)$, $u(t) \in \mathbf{GF}$.

De overige beweringen volgen uit lemma 2.20. $\square$

2.7 De propagator uitgedrukt in reeds gedefinieerde operatoren

Inleiding

We beschouwen enige bijzondere gevallen van het Cauchy-probleem. In deze gevallen zal de oplossing te schrijven zijn als het beeld van de beginwaarde onder een reeds in paragraaf 2.3 gedefinieerde operator. We laten zien dat deze uitdrukking van de oplossing overeenkomt met de algemene uitdrukking die we in de vorige paragraaf hebben geconstrueerd.

Deze paragraaf is ook te lezen als een rechtvaardiging voor de keuze van de ruimte **GF**: Er zal immers blijken dat, als zekere deelruimte van $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ níet invariant is onder één van de operatoren $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{S}_a$ of $\mathcal{F}$, dat deze deelruimte dan zéker niet invariant is onder $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$, met $\underline{\alpha}$ erg beschaafd. De in paragraaf 2.3 aangetoonde invariantie-eigenschappen van **GF** waren dus nodig.

Verder zal blijken dat we, met de resultaten uit paragraaf 2.1, twee commutatie-regels voor de propagatoren op **GF** kunnen afleiden. Dit wijst in de richting van een mogelijke groepsstructuur van deze objecten op **GF**.

2.7.1 De operator $\mathcal{T}_a$ als propagator

Lemma 2.31 *Er geldt, voor alle $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dat het Cauchy-probleem*

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \mathcal{D}u \\ u(0) &= f \end{aligned}$$

voor $t \in \mathbb{R}$ de oplossing

$$u(t) = \mathcal{T}_{-t}f$$

heeft. We schrijven daarom:

$$\mathrm{e}^{t\mathcal{D}} = \mathcal{T}_{-t} .$$

Bewijs Er geldt, voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$, en voor $f \in S'(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{T}_{-t}f, \phi\rangle &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, \mathcal{T}_t\phi\rangle \\
&= \langle f, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{T}_t\phi\rangle \\
&= -\langle f, \mathcal{D}\mathcal{T}_t\phi\rangle \\
&= -\langle f, \mathcal{T}_t\mathcal{D}\phi\rangle \\
&= \langle \mathcal{D}\mathcal{T}_{-t}f, \phi\rangle \ ,
\end{aligned}$$

immers

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{T}_t\phi(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(x-t) \\
&= -\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x-t) \\
&= -\mathcal{D}\mathcal{T}_t\phi(x) \ .
\end{aligned}$$

□

We vergelijken dit resultaat met de in paragraaf 2.6 geconstrueerde algemene theorie. Beschouw $\mathcal{A}(0,0,1,0,0,0) = \mathcal{D}$. Dan is A golfachtig. Beschouw het Cauchy-probleem

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \mathcal{D}u \\
u(0) &= \eta^{(p+1,\beta(0))}_{(\mu(0))}
\end{aligned}$$

met $\eta^{(p+1,\beta(0))}_{(\mu(0))} \neq 0$. Dan geeft stelling 2.3 dat de oplossing van dit Cauchy-probleem, voor $t \in (t_0, t_1)$, gegeven wordt door

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p} v_j(t)\eta^{(j+1,\beta(t))}_{(\mu(t))} \ .$$

Nu geldt, volgens definitie 2.8, dat $S = \emptyset$, en dus $(t_0, t_1) = \mathbb{R}$. Verder geldt, volgens definitie 2.10,

$$\mu(t) \equiv \mu(0)$$

en, volgens definitie 2.11 is $\beta(t)$ de oplossing van

$$\dot{\beta} = -2i\mu$$

dus

$$\beta(t) = -2i\mu(0)t + \beta(0) \ .$$

Verder zijn de functies $v_j(t)$, $0 \leq j \leq p$, oplossing van:

$$\dot{v}_0 = -i\beta v_0 \ ,$$

en, als $p \geq 3$,

$$\dot{v}_1 = -i\beta v_1 + 2v_2 \ ;$$

als $p \geq 4$, $2 \leq j \leq p-2$:

$$\dot{v}_j = -i\beta v_j + (j+1)v_{j+1} \ ;$$

als $p \geq 2$:

$$\dot{v}_{p-1} = -i\beta v_{p-1} + pv_p \ ;$$

terwijl

$$\dot{v}_p = -i\beta v_p \ ,$$

met $u_j(0) = \delta_{p,j}$. Dit geeft

$$\begin{aligned} \upsilon_p(t) &= \exp[\int_0^t (-2\mu(0)t - i\beta(0))\mathrm{d}\tau] \\ &= \mathrm{e}^{-i\beta(0)t-\mu(0)t^2} . \end{aligned}$$

Oplossen van de differentiaalvergelijkingen voor de overige coëfficiënten υ_j geeft:

$$\upsilon_j(t) = \binom{p}{j} t^{p-j}\mathrm{e}^{-i\beta(0)t-\mu(0)t^2}$$

We vinden inderdaad, met de eerder in lemma 2.11 berekende actie van $\mathcal{T}_a$, en in overeenstemming met lemma 2.31,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{t\mathcal{D}}\eta^{(p+1,\beta(0))}_{(\mu(0))} &= u(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j(t)\eta^{(j+1,\beta(t))}_{(\mu(t))} . \\ &= \mathrm{e}^{-i\beta(0)t-\mu(0)t^2} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} t^{p-j}\eta^{(j+1,\beta(0)-2i\mu(0)t)}_{(\mu(0))} \\ &= \mathcal{T}_{-t}\eta^{(p+1,\beta(0))}_{(\mu(0))} \end{aligned}$$

Zoals aangekondigd in paragraaf 2.1.2 werpen deze overwegingen enig licht op de mogelijke groepsstructuur van de propagatoren op de ruimte **GF**. We kunnen nu, met lemma 2.5, immers schrijven, voor $s \in I_{\underline{\alpha}_0} = \mathbb{R}$ en $t \in I_{\underline{\alpha}_1}$,

$$\mathrm{e}^{s\mathcal{A}(\underline{\alpha}_0)}\mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha}_1)} = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha}_2)}\mathrm{e}^{s\mathcal{A}(\underline{\alpha}_0)}$$

met

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_0 &= (0,0,1,0,0,0) \\ \underline{\alpha}_1 &= (\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\ \underline{\alpha}_2 &= (\alpha_{2,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0} - s\alpha_{1,1},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{0,1} - 2s\alpha_{0,2},\ s^2\alpha_{0,2} - s\alpha_{0,1} + \alpha_{0,0}) . \end{aligned}$$

2.7.2 De operatoren $\mathcal{E}_a$ en $\mathcal{S}_a$ als propagator

De operator $\mathcal{E}_a$

Op dezelfde manier als bij lemma 2.31 is het volgende aan te tonen:

Lemma 2.32 *Er geldt, voor $t \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{e}^{it\mathcal{X}} = \mathcal{E}_{-t} .$$

□

Ook dit is, met de in lemma 2.12 berekende actie van $\mathcal{E}_a$, in overeenstemming met de in stelling 2.3 gepresenteerde algemene oplossing van het Cauchy-probleem in **GF**.

En ook geeft dit, net als in de paragraaf over $\mathcal{T}_a$, een commutatie-regel voor propagatoren. Immers, met lemma 2.5, kunnen we nu schrijven, voor $s \in I_{\underline{\alpha}_0} = \mathbb{R}$ en $t \in I_{\underline{\alpha}_1}$,

$$\mathrm{e}^{s\mathcal{A}(\underline{\alpha}_0)}\mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha}_1)} = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha}_2)}\mathrm{e}^{s\mathcal{A}(\underline{\alpha}_0)}$$

met

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_0 &= (0,0,0,0,i,0) \\ \underline{\alpha}_1 &= (\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0}) \\ \underline{\alpha}_2 &= (\alpha_{2,0},\ \alpha_{1,1},\ \alpha_{1,0} + 2is\alpha_{0,2},\ \alpha_{0,2},\ \alpha_{0,1} + is\alpha_{1,1},\ -s^2\alpha_{0,2} + is\alpha_{1,0} + \alpha_{0,0}) . \end{aligned}$$

De operator $\mathcal{S}_a$

Voor de operator $\mathcal{S}_a$ geldt:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{a\mathcal{X}\mathcal{D}} ,$$

immers,

$$u(x,t) = \phi(\mathrm{e}^t x)$$

voldoet aan

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \mathcal{X}\mathcal{D}u \\ u(0) &= \phi . \end{aligned}$$

Ook dit is in overeenstemming met de resultaten.

2.7.3 De operator $\mathcal{F}$ als propagator

Ook de operator $\mathcal{F}$ is te schrijven als $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha})}$. Immers, volgens [T, Theorem 57, p. 81] geldt:

$$\mathcal{F}\psi_n = i^n\psi_n$$

met ψ_n de Hermite-functies (zie bijlage A). Verder geldt, volgens lemma D.3, dat iedere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ te schrijven is als

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\psi_j$$

met $u_j \in \mathbb{C}$. Beschouw nu

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t)\psi_j ,$$

en beschouw de operator $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2 - 1)$. Dan $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathcal{Q} - 2\mathcal{I})$, met $\mathcal{Q}$ als in hoofdstuk 1, en dus, volgens gelijkheid 1.2,

$$\mathcal{H}\psi_n = n\psi_n .$$

Dit geeft

$$\mathrm{e}^{ti\mathcal{H}}\psi_n = \mathrm{e}^{nit}\psi_n .$$

Als nu $u(t)$ voldoet aan

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = i\mathcal{H}u(t) ,$$

dan

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{e}^{ti\mathcal{H}}u(0) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(0)\mathrm{e}^{ti\mathcal{H}}\psi_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(0)\mathrm{e}^{jit}\psi_j \end{aligned}$$

en dus, met $t = \frac{1}{2}\pi(1+4k)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\pi(1+4k)i\mathcal{H}} u(0) &= u(\tfrac{1}{2}\pi(1+4k)) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(0) e^{\frac{1}{2}\pi i j} \psi_j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(0) i^j \psi_j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(0) \mathcal{F}\psi_j \\
&= \mathcal{F}u(0)\,.
\end{aligned}
$$

We concluderen:

$$\mathcal{F} = e^{\frac{1}{2}\pi(1+4k)i\mathcal{H}}\,,$$

i.e.

$$\mathcal{F} = e^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha})}$$

met

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\underline{\alpha}) &= \mathcal{A}(-i,0,0,i,0,-i) \\
&= -i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2 - i\mathcal{I}\,, \\
t &\in \{(k+\tfrac{1}{4})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.
\end{aligned}
$$

Ook dit is in overeenstemming met de eerder gevonden uitdrukking voor $\mathcal{F}$ op **GF**, en voor $e^{t\mathcal{A}}$ op **GF**.

In de volgende paragraaf los ik de Schrödingervergelijking voor de harmonische oscillator op. Ook dat kan dienen als illustratie van bovenstaande uitdrukking voor de Fourier-transformatie. (Zie ook de paragraaf 2.8.2.)

2.8 De Schrödinger-vergelijking voor de harmonische oscillator

Inleiding

De Schrödinger-vergelijking luidt

$$\tfrac{d}{dt}u = i\mathcal{H}u$$

met $\mathcal{H}$ zekere zelfgeadjungeerde operator. Voor de harmonische oscillator is deze vergelijking te schrijven als

$$\tfrac{d}{dt}u(t) = (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2)u(t)\,.$$

Deze vergelijking is ook voor te stellen door de volgende partiële differentiaalvergelijking:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = (ix^2 - i\tfrac{\partial^2}{\partial x^2})u(x,t)\,.$$

Merk op dat, wanneer we deze vergelijking schrijven als

$$\tfrac{d}{dt}u(t) = \mathcal{A}(\underline{\alpha})u(t)$$

A($\underline{\alpha}$) golfachtig is. De resultaten uit paragraaf 2.6.3 leren dan dat het existentie-interval in het algemeen eindig is, en dus níet gelijk aan $I_{\underline{\alpha}} = \mathbb{R}$. Toch kunnen we een oplossing op $\mathbb{R}$ vinden: We kunnen immers de (periodieke) singulariteiten omzeilen door 'op tijd' de Fourier-getransformeerde van de oplossing te beschouwen. In de volgende paragraaf wordt dit gedemonstreerd.

2.8.1 De oplossing van een Cauchy-probleem voor de Schrödinger-vergelijking

Stelling 2.4 *Het Cauchy-probleem voor de Schrödinger-vergelijking voor de harmonische oscillator:*

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2)u(t) \\ u(0) &= \eta^{(0,b)} \end{aligned} \tag{2.22}$$

heeft als oplossing voor $t \in \mathbb{R}$:

$$u(t) = \begin{cases} \upsilon(t)\eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))} & \textit{als } t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ \eta^{(1,b)} & \textit{als } t \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \\ \eta^{(1,-b)} & \textit{als } t \in \{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

met, voor $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \tfrac{1}{2}i\cot(2t)\,, \\ \beta(t) &= -\frac{b}{\sin(2t)}\,, \\ \upsilon_0(t) &= \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}}\,. \end{aligned}$$

Bewijs Schrijf

$$u(t) = \begin{cases} u(t) & \text{als } t \in [\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi], \\ \check{u}(t) & \text{als } t \in [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi]. \end{cases}$$

met

$$u(t) = \upsilon(t)\eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))}\,.$$

Het Cauchy-probleem

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\check{u}(t) &= (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2)u(t) \\ \check{u}(0) &= \eta^{(0,b)} \end{aligned}$$

heeft de oplossing $\check{u}(t)$, dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(t) &= (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2)\hat{u}(t) \\ \hat{u}(0) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\eta^{(1,-b)}_{(0)}\,, \end{aligned}$$

met $\hat{u}(t) = \mathcal{F}\check{u}(t)$; immers, $\mathcal{F}(-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2)\mathcal{F}^{-1} = -i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2$.

Er geldt $-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2 = \mathcal{A}(-i,0,0,i,0,0) = \mathcal{A}(\underline{\alpha})$ met $\underline{\alpha} = (-i,0,0,i,0,0)$: $\alpha_{2,0} = -i$, $\alpha_{0,2} = i$, de overige α's zijn 0. We zien: A$(\underline{\alpha})$ is golfachtig. $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} = -4 < 0$. $\omega = 2i$, $\mu_+ = -\frac{1}{2}$, $\mu_- = \frac{1}{2}$. Omdat verder $0 = \check{\mu}(0) \neq \pm\frac{1}{2}$ is S van type drie, $\check{\lambda}_0 = -4i$. Met lemma 2.24 volgt dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$, $\check{S}(\underline{\alpha}, 0) \cap [(k-\frac{1}{4})\frac{1}{2}\pi, (k+\frac{1}{4})\frac{1}{2}\pi] = \emptyset$.

We zullen de oplossing construeren met volledige inductie. Met stelling 2.3 geldt dat voor $t \in [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi]$ de uitdrukking

$$\hat{u}(t) = \hat{\upsilon}(t)\eta^{(1,\hat{\beta}(t))}_{(\hat{\mu}(t))}$$

oplossing is van het bovenstaande Cauchy-probleem. De functie $\hat{\mu}(t)$ zal daarbij voldoen aan

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t) &= \mu_+ - \frac{\omega}{2\alpha_{2,0} + (\lambda_0 - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t}} \\ &= -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{4it}} \\ &= -\tfrac{1}{2}i\tan(2t) \end{aligned}$$

De functies $\hat{\beta}(t)$ en $\hat{v}(t)$ zijn als in definitie 2.11: ze zullen, voor $t \in [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi]$, oplossing zijn van

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\beta}} &= 4i\hat{\mu}\hat{\beta} \\ &= 2\tan(2t)\hat{\beta} \\ \hat{\beta}(0) &= -b\,, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= -b\exp[2\int_0^t \tan(2\tau)\mathrm{d}\tau] \\ &= -b\mathrm{e}^{-\log|\cos(2t)|} \\ &= -\frac{b}{\cos(2t)} \end{aligned}$$

en van

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}} &= (2i\hat{\mu} + i\hat{\beta}^2)\hat{v} \\ &= (\tan(2t) + i\frac{b^2}{\cos^2(2t)})\hat{v} \\ \hat{v}(0) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[\int_0^t(\tan(2\tau) + i\frac{b^2}{\cos^2(2\tau)})\mathrm{d}\tau] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\cos(2t)}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}ib^2\tan(2t)}\,. \end{aligned}$$

Merk op dat voor alle $t \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(\hat{\mu}(t)) = 0$. Verder:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\tfrac{1}{8}\pi) &= -\tfrac{1}{2}i\tan(\tfrac{1}{4}\pi) \\ &= -\tfrac{1}{2}i\,. \end{aligned}$$

Nu geldt, met lemma 2.18, dat $\check{u}(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(t)$ voor $t \in [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi]$ oplossing is van het oorspronkelijke Cauchy-probleem 2.22. Voor $t \in [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi] \setminus \{0\}$ is $\hat{\mu}(t) \neq 0$, en is, volgens lemma 2.7, $\check{u}(t)$ dus te schrijven als

$$\begin{aligned} \check{u}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(t) \\ &= \hat{v}_0(t)\mathcal{F}^{-1}\eta^{(1,\hat{\beta}(t))}_{(\hat{\mu}(t))} \\ &= \hat{v}_0(t)2^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{\hat{\beta}(t)^2}{4\hat{\mu}(t)}]\hat{\mu}(t)^{-\frac{1}{2}}\eta^{(1,-\frac{i\hat{\beta}(t)}{2\hat{\mu}(t)})}_{(\frac{1}{4\hat{\mu}(t)})} \\ &= \check{v}_0(t)\eta^{(1,\check{\beta}(t))}_{(\check{\mu}(t))}\,, \end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}
\check{v}_0(t) &= \hat{v}_0(t)2^{-\frac{1}{2}}\exp[-\tfrac{\hat{\beta}(t)^2}{4\hat{\mu}(t)}]\hat{\mu}(t)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(1+i)\exp[\frac{1}{2}ib^2(\tan(2t)-\frac{2}{\sin(4t)})]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}} \\
&= \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}}\,, \\
\check{\beta}(t) &= -\frac{i\hat{\beta}(t)}{2\hat{\mu}(t)} \\
&= -\frac{b}{\sin(2t)} \\
\check{\mu}(t) &= \frac{1}{4\hat{\mu}(t)} \\
&= \tfrac{1}{2}i\cot(2t)\,.
\end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned}
\check{\mu}(\tfrac{1}{8}\pi) &= \frac{1}{4\hat{\mu}(\frac{1}{8}\pi)} \\
&= \tfrac{1}{2}i\,, \\
\check{\beta}(\tfrac{1}{8}\pi) &= -\sqrt{2}b\,, \\
\check{v}_0(\tfrac{1}{8}\pi) &= \frac{(1+i)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ib^2}}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi}}\,.
\end{aligned}$$

Schrijf nu $u_{(1)}(t) = u(t+\frac{1}{8}\pi)$. Dan voldoet $u_{(1)}(t)$ aan

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{(1)}(t) &= (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2)u_{(1)}(t) \\
u_{(1)}(0) &= v(\tfrac{1}{8}\pi)\eta^{(1,\beta(\frac{1}{8}\pi))}_{(\mu(\frac{1}{8}\pi))} \\
&= \check{v}(\tfrac{1}{8}\pi)\eta^{(1,\check{\beta}(\frac{1}{8}\pi))}_{(\frac{1}{2}i)}\,.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

We schrijven

$$u_{(1)}(t) = v_{(1)}(t)\eta^{(1,\beta_{(1)}(t))}_{(\mu_{(1)}(t))}\,.$$

Dan $\mu_{(1)}(0) = \frac{1}{2}i$. Dus $\mathrm{Re}(4\alpha_{2,0}\mu_{(1)}(0) - \alpha_{1,1}) = 2$, en we vinden, op grond van lemma 2.25, dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$,

$$S_{(1)}(\underline{\alpha}, \tfrac{1}{2}i) \cap [k\tfrac{1}{2}\pi, (k+\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}\pi] = \emptyset\,.$$

Dit geeft het existentie-interval $[t_0,t_1]_{(1)} = [0, \frac{1}{4}\pi]$, dus $[t_0,t_1] = [\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi]$. Met stelling 2.3 volgt nu dat, voor $t \in [0,\frac{1}{4}\pi]$, $u_{(1)}(t)$ oplossing is van het Cauchy-probleem 2.23, als het volgende geldt: Er geldt

$$\begin{aligned}
\lambda_{0(1)} &:= \frac{\omega}{\mu_+ - \mu_{(1)}(0)} \\
&= -2(1+i)
\end{aligned}$$

en dus, voor $t \in [0, \frac{1}{4}\pi]$,

$$\begin{aligned}
\mu_{(1)}(t) &= \mu_+ - \frac{\omega}{2\alpha_{2,0} + (\lambda_{0(1)} - 2\alpha_{2,0})\mathrm{e}^{2\omega t}} \\
&= -\tfrac{1}{2} + \frac{i}{i + \mathrm{e}^{4it}} \\
&= -\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{4i(t+\frac{1}{8}\pi)}} \\
&= \tfrac{1}{2}i\cot(2(t + \tfrac{1}{8}\pi)) \ .
\end{aligned}$$

Verder zullen $\beta_{(1)}(t)$ en $\upsilon_{(1)}(t)$ zijn als in de definities 2.10 en 2.11: voor $t \in [0, \frac{1}{4}\pi]$:

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_{(1)}(t) &= 4i\mu_{(1)}(t)\beta_{(1)}(t) \\
&= -2\cot(2t + \tfrac{1}{4}\pi)\beta_{(1)}(t) \\
\beta_{(1)}(0) &= \check{\beta}(\tfrac{1}{8}\pi) \\
&= -\sqrt{2}b
\end{aligned}$$

dus

$$\beta_{(1)}(t) = -\frac{b}{\sin(2(t + \frac{1}{8}\pi))}$$

en

$$\begin{aligned}
\dot{\upsilon}_{(1)}(t) &= (2i\mu_{(1)}(t) + i\beta_{(1)}^2(t))\upsilon_{(1)}(t) \\
\upsilon_{(1)}(0) &= \check{\upsilon}(\tfrac{1}{8}\pi) \\
&= \frac{(1+i)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ib^2}}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

dus

$$\upsilon_{(1)}(t) = \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2(t+\frac{1}{8}\pi))]}{2\sqrt{\pi\sin(2(t+\frac{1}{8}\pi))}} \ .$$

Dit alles betekent, voor $t \in [\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi]$:

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \tfrac{1}{2}i\cot(2t) \ , \\
\beta(t) &= -\frac{b}{\sin(2t)} \ , \\
\upsilon(t) &= \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}} \ .
\end{aligned}$$

We formuleren de inductie-veronderstelling: Stel, dat voor zekere $n \in \mathbb{N}$ geldt, voor $t \in [(n - \frac{1}{4})\frac{1}{2}\pi, (n + \frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi] \setminus \{\frac{1}{2}n\pi\}$:

$$u(t) = \upsilon(t)\eta_{(\mu(t))}^{(1,\beta(t))}$$

met

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \tfrac{1}{2}i\cot(2t) \ , \\
\beta(t) &= -\frac{b}{\sin(2t)} \ , \\
\upsilon(t) &= \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}} \ ,
\end{aligned}$$

terwijl,

$$u(\tfrac{1}{2}n\pi) = \begin{cases} \eta^{(0,b)} & \text{als } n \text{ even,} \\ \eta^{(0,-b)} & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

We zetten de inductiestap. Er geldt, voor $\hat{u}_{(n)}(t) := \mathcal{F}u(t + (n + \frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi)$, dat

$$\begin{aligned} \hat{u}_{(n)}(0) &= \mathcal{F}u((n + \tfrac{3}{4})\tfrac{1}{2}\pi) \\ &= \mathcal{F}\frac{(1+i)e^{\frac{1}{2}ib^2}}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1)^n\pi}}\eta^{(1,\sqrt{2}b(-1)^n)}_{(-\frac{1}{2}i)} \\ &= \frac{(1+i)e^{\frac{1}{2}ib^2}}{2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\pi}i^{n+1}}i^{\frac{1}{2}}e^{-ib^2}\eta^{(1,-\sqrt{2}b(-1)^n)}_{(\frac{1}{2}i)} \\ &= \frac{(-i)^n}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}ib^2}\eta^{(1,\sqrt{2}b(-1)^n)}_{(\frac{1}{2}i)} \,. \end{aligned}$$

Op grond van lemma 2.25, kunnen we schrijven, voor $t \in [0, \frac{1}{4}\pi]$,

$$\hat{u}_{(n)}(t) = \hat{v}_{(n)}(t)\eta^{(1,\hat{\beta}_{(n)}(t))}_{(\hat{\mu}_{(n)}(t))} \,,$$

en er zal gelden

$$\hat{\mu}_{(n)}(t) = -\tfrac{1}{2}i\tan(2t + \tfrac{3}{4}\pi) \,;$$

$\hat{\beta}_{(n)}(t)$ zal oplossing zijn van

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\beta}}_{(n)}(t) &= 2\tan(2t + \tfrac{3}{4}\pi)\hat{\beta}_{(n)}(t) \\ \hat{\beta}_{(n)}(0) &= -\sqrt{2}b(-1)^n \,, \end{aligned}$$

dus, voor $t \in [0, \frac{1}{4}\pi]$,

$$\hat{\beta}_{(n)}(t) = \frac{(-1)^n b}{\cos(2t + \frac{3}{4}\pi)}$$

terwijl $\hat{v}_{(n)}(t)$ oplossing zal zijn van

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_{(n)}(t) &= (\tan(2t + \tfrac{3}{4}\pi) + \frac{2b^2}{\cos^2(2t + \frac{3}{4}\pi)})\hat{v}_{(n)}(t) \\ \hat{v}_{(n)}(0) &= \frac{(-i)^n}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}ib^2} \end{aligned}$$

dus

$$\hat{v}_{(n)}(t) = \frac{(-i)^n}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi\cos(2t + \frac{3}{4}\pi)}}\exp[\tfrac{1}{2}ib^2\tan(2t + \frac{3}{4}\pi)] \,.$$

Voor

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{F}^{-1}\hat{u}_{(n)}(t - (n + \tfrac{3}{4})\tfrac{1}{2}\pi) \\ &= v(t)\eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))} \end{aligned}$$

betekent dit alles, voor $t \in [(n + \frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi, (n + \frac{5}{4})\frac{1}{2}\pi] \setminus \{(n+1)\frac{1}{2}\pi\}$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \tfrac{1}{2}i\cot(2t) \,, \\ \beta(t) &= -\frac{i\hat{\beta}_{(n)}(t - (n + \frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi)}{2\hat{\mu}_{(n)}(t - (n + \frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi)} \\ &= -\frac{b}{\sin(2t)} \,, \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \upsilon(t) &= 2^{-\frac{1}{2}}\hat{\upsilon}_{(n)}(t-(n+\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{2}\pi)\hat{\mu}_{(n)}(t-(n+\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{\hat{\beta}^2_{(n)}(t-(n+\frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi)}{4\hat{\mu}_{(n)}(t-(n+\frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi)}] \\ &= \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}}\,, \end{aligned}$$

terwijl voor $u((n+1)\frac{1}{2}\pi)$ geldt:

$$\begin{aligned} u((n+1)\frac{1}{2}\pi) &= \mathcal{F}^{-1}\hat{u}_{(n)}(\tfrac{1}{8}\pi)) \\ &= \hat{u}_{(n)}(\tfrac{1}{8}\pi)\mathcal{F}^{-1}\eta^{(1,\hat{\beta}_{(n)}(\frac{1}{8}\pi))}_{(\hat{\mu}_{(n)}(\frac{1}{8}\pi))} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\eta^{(1,(-1)^n b)}_{(0)} \\ &= \eta^{(0,(-1)^{n+1}b)}\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Schrijf nu

$$\begin{aligned} u(t+(n+\tfrac{5}{4})\tfrac{1}{2}\pi) &=: u_{(n)}(t) \\ &= \eta^{(1,\beta_n(t))}_{(\mu_{(n)}(t))} \end{aligned}$$

dan $\mu_{(n)}(0)=\frac{1}{2}i$, dus we vinden, met lemma 2.25, het existentie-interval $[t_0,t_1]_{(n)}=[0,\frac{1}{4}\pi]$. Met stelling 2.3 volgt dat, voor $t\in[0,\frac{1}{4}\pi]$, $u_{(n)}(t)$ oplossing is van het Cauchy-probleem 2.23, als geldt

$$\mu_{(n)}(t) = \tfrac{1}{2}i\cot(2t+(n+\tfrac{5}{4})\pi)$$

terwijl

$$\begin{aligned} \beta_{(n)}(t) &= -\frac{b}{\sin(2t+(n+\frac{5}{4})\pi)}\,, \\ \upsilon_{(n)}(t) &= \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t+(n+\frac{5}{4})\pi)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t+(n+\frac{5}{4})\pi)}}\,, \end{aligned}$$

met $t\in[0,\frac{1}{4}\pi]$. Dit betekent, voor $t\in[(n+\frac{5}{4})\frac{1}{2}\pi,(n+\frac{7}{4})\frac{1}{2}\pi]$, en, merk op, óók voor $t\in[(n+\frac{3}{4})\frac{1}{2}\pi,(n+\frac{5}{4})\frac{1}{2}\pi]\setminus\{(n+1)\frac{1}{2}\pi\}$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \tfrac{1}{2}i\cot(2t)\,, \\ \beta(t) &= -\frac{b}{\sin(2t)}\,, \end{aligned}$$

en

$$\upsilon(t) = \frac{(1+i)\exp[-\frac{1}{2}ib^2\cot(2t)]}{2\sqrt{\pi\sin(2t)}}\,.$$

Dit betekent, voor $t\in[(\{n+1\}-\frac{1}{4})\frac{1}{2}\pi,(\{n+1\}+\frac{3}{3})\frac{1}{2}\pi]\setminus\{\frac{1}{2}(n+1)\pi\}$,

$$u(t) = \upsilon(t)\eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))}$$

Met gelijkheid 2.24 geeft dit de inductie-stap. Met de inductieveronderstelling en het eerste gedeelte van dit bewijs vinden we:

$$u(t) = \begin{cases} \eta^{(0,b)} & \text{als } t=n\pi,\ n\in\mathbb{N}, \\ \eta^{(0,-b)} & \text{als } t=(n+\frac{1}{2})\pi,\ n\in\mathbb{N}, \\ \upsilon(t)\eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))} & \text{als } t\in[-\frac{1}{8}\pi,\infty)\setminus\{0,\frac{1}{2}\pi,\pi,\ldots\}. \end{cases}$$

Voor $t<-\frac{1}{8}\pi$ kunnen we op een analoge manier de oplossing vinden. □

We merken nog op dat voor bovenstaande oplossing $u(t)$ geldt: voor $k \in \mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
u((k+\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}\pi) &= \frac{(-i)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\eta_{(0)}^{(1,(-1)^k b)} \\
&= \frac{(-i)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \exp[(-i)^{k+\frac{3}{2}}x] \,.
\end{aligned}
$$

2.8.2 Het verband met de Fourier-transformatie

Schrijf $v(t) = \mathrm{e}^{-it}u(t)$, met $u(t)$ de oplossing van bovenstaande Schrödinger-vergelijking. Dan geldt

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) &= (\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) - iu(t))\mathrm{e}^{-it} \\
&= (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2 - i\mathcal{I})u(t)\mathrm{e}^{-it} \\
&= (-i\mathcal{D}^2 + i\mathcal{X}^2 - i\mathcal{I})v(t) \,,
\end{aligned}
$$

dus volgens het resultaat van paragraaf 2.7.3 geldt, voor $t = (k+\frac{1}{4})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)(-1)^k u(t) &= \mathrm{e}^{-it}u(t) \\
&= v(t) \\
&= \mathcal{F}v(0) \\
&= \mathcal{F}u(0)
\end{aligned}
$$

en dus ook

$$
\mathcal{F}u(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)(-1)^k u(t + (k+\tfrac{1}{4})\pi) \,.
$$

Door substitutie is na te gaan dat onze oplossing inderdaad deze eigenschap heeft.

Hoofdstuk 3

Een aanzet tot een algebraïsche structuur op de ruimte GF, aanbevelingen en conclusies

Inleiding

In dit hoofdstuk voorzien we **GF** van een algebraïsche structuur, door, in paragraaf 3.1, drie produkten in te voeren. Met deze produkten kunnen we, voor een speciale keuze van de coëfficiënt $\underline{\alpha}$, de oplossing van het Cauchy-probleem voor $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$ beschrijven. Dit gebeurt in paragraaf 3.2. De produkten dienen echter met de nodige terughoudendheid tegemoet te worden getreden. In paragraaf 3.3 zal immers blijken dat de basis van **GF**, die we in het vorige hoofdstuk hebben ingevoerd, voor verbetering vatbaar is. We besluiten dit hoofdstuk met paragraaf 3.4: conclusies.

3.1 Drie produkten

Inleiding

GF is, net als $\mathbf{GF}_t$, en in tegenstelling tot $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, te voorzien van algebraïsche structuren, zoals een puntprodukt, een convolutieprodukt en een scalair produkt.

We zijn geïnteresseerd in de vraag of zo'n scalair produkt zó te kiezen is dat, als A golfachtig is, de propagator $e^{t\mathcal{A}}$ unitair is. Deze vraag zal hier niet beantwoord worden. Ik zal in deze paragraaf slechts enige ideeën over deze produkten laten zien.

We schrijven $\mathcal{O}_M$ voor de verzameling functies $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ waarvoor geldt dat er, voor alle $n \in \mathbb{N}$, constanten $N(n)$ en $C(n)$ zijn, zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$|\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)| \leq C(1+x^2)^N .$$

Er geldt: $\mathcal{O}_M \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (Zie [R&S 1, Example 7, p. 137].)

Alvorens we de produkten invoeren, definiëren we een complexe conjugatie op **GF**:

Definitie 3.1 We definiëren de *complexe conjugatie* $\bar{\cdot}$ op **GF**:

$$\begin{aligned} \overline{\eta}^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)} &:= \eta^{(p+1,-\overline{\alpha})}_{(\overline{\mu})} \\ \overline{\eta}^{(-q,b)} &:= \eta^{(-q,b)} \end{aligned}$$

terwijl voor alle $f, g \in \mathbf{GF}$ en $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\alpha f} = \overline{\alpha}\overline{f}\,, \qquad \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}\,.$$

□

Er geldt, in klassieke zin,

$$\overline{\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}}(x) = \eta_{(\overline{\mu})}^{(p+1,-\overline{\alpha})}(x)$$

dus de definitie van de complexe conjugatie op **GF** is een uitbreiding van de klassieke complexe conjugatie.

3.1.1 Een scalair produkt op GF

Als $f \in O_M$ en $\phi \in S(\mathbb{R})$, dan is $\langle f, \phi\rangle$ te schrijven als

$$\langle f, \phi\rangle \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\phi(x)}\mathrm{d}x\ .$$

We beperken deze sesquilineaire vorm tot een produkt op $(\mathbf{GF} \cap O_M) \times (\mathbf{GF} \cap S(\mathbb{R}))$. We zullen dit beperkte produkt nu uitbreiden tot een produkt op $\mathbf{GF} \times \mathbf{GF}$. Bedenk dat $\mathbf{GF} \cap O_M = \mathbf{GF}_+$.

Er geldt, voor $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ en $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, omdat $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \in S(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle \eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}, \eta_{(\nu)}^{(q+1,\beta)}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{p+q}\mathrm{e}^{i(\alpha-\overline{\beta})x-(\mu+\overline{\nu})x^2}\mathrm{d}x \\ &= I_{p+q}(i(\alpha-\overline{\beta}), \mu+\overline{\nu})\ ,\end{aligned}$$

waar

$$I_p(\alpha,\mu) := \tfrac{1}{\sqrt{\mu^{p+1}}}\mathrm{e}^{\frac{\alpha^2}{4\mu}} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \Gamma(\tfrac{1}{2}j + \tfrac{1}{2})(\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}})^{p-j}\ .$$

Dit volgt op een soortgelijke manier als bij de berekening van $\mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\beta)}$ in paragraaf 2.3.1. Merk op dat $I_p(\alpha,\mu)$ een analytische functie van μ is voor $\mu \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Dus $I_{p+q}(i(\alpha-\overline{\beta}), \mu+\overline{\nu})$ is, voor $\mathrm{Re}(\mu) \geq 0, \mu \neq 0$, een analytische functie van ν in het gebied $\mathrm{Re}(\nu) \geq 0$. De uitdrukking $I_{p+q}(i(\overline{\alpha}-\beta), \overline{\mu}+\nu)$ heeft dus betekenis voor $\mathrm{Re}(\mu) \geq 0$, $\mathrm{Re}(\nu) \geq 0$, μ, ν niet beide nul.

Beschouw vervolgens, voor $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, $\langle \eta^{(-q,b)}, \eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}\rangle$. Er geldt $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \in S(\mathbb{R})$, en we kunnen dus schrijven:

$$\begin{aligned}\langle \eta^{(-q,b)}, \eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}\rangle &= \frac{1}{(-1)^q q!}\int_{-\infty}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{i\overline{\alpha}x-\overline{\mu}x^2}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x-b)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{q!}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}[x^p\mathrm{e}^{i\overline{\alpha}x-\overline{\mu}x^2}]\delta(x-b)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{\min\{p,q\}} \frac{1}{(q-j)!}\binom{p}{j}\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-j}\frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}x^{q-j}}[\mathrm{e}^{i\overline{\alpha}x-\overline{\mu}x^2}]\delta(x-b)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{\min\{p,q\}} \frac{1}{(q-j)!}\binom{p}{j} b^{p-j} D_{q-j}(\alpha, b, \mu)\ ,\end{aligned}$$

met, voor àlle $\mu \in \mathbb{C}$,

$$D_{q-j}(\alpha, b,\mu) := \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}x^{q-j}}[\mathrm{e}^{i\overline{\alpha}x-\overline{\mu}x^2}]\breve{]}_{x=b}\ .$$

De uitdrukkingen I en D zijn eventueel nog in Hermite-polynomen uit te drukken.

Blijkbaar kunnen we zonder problemen het definitiegebied van $\langle\cdot,\cdot\rangle$ uitbreiden, en definiëren:

Definitie 3.2 We definiëren het *scalair produkt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ op $\mathbf{GF}^2$:

$$\begin{aligned}
\langle\eta_{(0)}^{(p+1,a)},\eta_{(0)}^{(q+1,b)}\rangle &:= 0\\
\langle\eta^{(-p,a)},\eta^{(-q,b)}\rangle &:= 0\\
\langle\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)},\eta_{(\nu)}^{(q+1,\beta)}\rangle &:= I_{p+q}(i(\alpha-\overline{\beta}),\mu+\overline{\nu}) \qquad \mu,\nu \text{ niet beide } 0.\\
\langle\eta^{(-q,b)},\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}\rangle &:= \sum_{j=0}^{\min\{p,q\}}\frac{1}{(q-j)!}\binom{p}{j}b^{p-j}D_{q-j}(\alpha,b,\mu)\,,
\end{aligned}$$

met I en D als boven. Het scalair produkt is sesquilineair en anticommutatief, i.e. voor alle $f,g\in\mathbf{GF}$

$$\begin{aligned}
\langle\alpha f,g\rangle &= \alpha\langle f,g\rangle\\
\langle f,\alpha g\rangle &= \langle\overline{\alpha}f,g\rangle\\
\langle f,g+h\rangle &= \langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle\\
\langle f,g\rangle &= \overline{\langle g,f\rangle}\,,
\end{aligned}$$

Deze definitie is zinnig: voor alle $f,g\in\mathbf{GF}$ kunnen we met deze regels $\langle f,g\rangle$ bepalen. □

Merk op dat nu geldt:

$$\langle\eta_{(0)}^{(p+1,a)},\eta^{(-q,b)}\rangle = \mathrm{e}^{iab}(ia)^{q-p}\sum_{k=0}^{\min\{p,q\}}\binom{p}{k}\frac{(iab)^{p-k}}{(q-k)!}\,.$$

Merk verder op dat $\langle\eta_{(0)}^{(1,0)}-\eta^{(0,0)},\eta_{(0)}^{(1,0)}-\eta^{(0,0)}\rangle = -2 < 0$. Het produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is dus géén inprodukt, en brengt dus géén norm voort. Wel voldoet ons scalair produkt aan de polarisatie-gelijkheid:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}(\langle f+g,f+g\rangle-\langle f-g,f-g\rangle+i\langle f-ig,f-ig\rangle-i\langle f+ig,f+ig\rangle)$$

en aan de parallellogram-gelijkheid:

$$\langle f+g,f+g\rangle+\langle f-g,f-g\rangle = 2(\langle f,f\rangle+\langle g,g\rangle)\,.$$

(Zie ook [W, p. 2].) Verder brengen we de eigenschap

$$\langle\eta_{(0)}^{(p+1,-a)},\eta^{(-q,b)}\rangle = \overline{\langle\eta_{(0)}^{(p+1,a)},\eta^{(-q,b)}\rangle}$$

onder de aandacht. We merken op: als we de uitdrukking $\langle\eta_{(0)}^{(p+1,a)},\eta^{(-q,b)}\rangle$ in klassieke zin een betekenis willen geven, en net doen alsof x^pe^{iax} tot een zekere klasse van testfuncties behoort, dan geldt

$$\begin{aligned}
\langle\eta_{(0)}^{(p+1,a)},\eta^{(-q,b)}\rangle &= \frac{1}{(-1)^q q!}\int_{-\infty}^{\infty}x^p\mathrm{e}^{iax}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\delta(x-b)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{q!}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}x^p\mathrm{e}^{iax}\Big|_{x=b}\\
&= \frac{1}{q!}\sum_{j=0}^{\min\{p,q\}}\binom{q}{j}\frac{p!}{(p-j)!}b^{p-j}(ia)^{q-j}\mathrm{e}^{iab}\\
&= \mathrm{e}^{iab}(ia)^{q-p}\sum_{k=0}^{\min\{p,q\}}\binom{p}{k}\frac{(iab)^{p-k}}{(q-k)!}\,,
\end{aligned}$$

in overeenstemming met onze definitie van $\langle\eta_{(0)}^{(p+1,a)},\eta^{(-q,b)}\rangle$.

Het scalair produkt op $\mathbf{GF} \times \mathbf{GF}$ is niet gedegenereerd: als $f \in \mathbf{GF}$ zodanig, dat voor alle $g \in \mathbf{GF}$: $\langle f, g\rangle = 0$, dan $f = 0$. Verder geldt, voor alle $f, g \in \mathbf{GF}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\langle f, g\rangle} &= \langle \overline{f}, \overline{g}\rangle \\
\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle &= \langle f, g\rangle\,, \\
\langle \mathcal{T}_a f, \mathcal{T}_a g\rangle &= \langle f, g\rangle\,, \\
\langle \mathcal{S}_a f, \mathcal{S}_a g\rangle &= \tfrac{1}{a}\langle f, g\rangle\,.
\end{aligned}$$

Dit is door eenvoudigweg de basiselementen in te vullen na te gaan. De berekeningen die daarbij uitgevoerd dienen te worden, zijn echter nogal omvangrijk. Een computer-algebra pakket kan hier voor enige verlichting zorgen.

3.1.2 Een puntprodukt op GF

Definieer, voor alle $M \in \mathcal{O}_M$, de operator $M\cdot$ op $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ door: voor alle $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle M\cdot f, \phi\rangle \quad = \quad \langle f, \overline{M}\phi\rangle\,,$$

met $(\overline{M}\phi)(x) := \overline{M(x)}\phi(x)$. Deze definitie is zinvol, immers M beeldt $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ continu in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ af.

We definiëren nu het volgende puntprodukt op $\mathbf{GF} \times \mathbf{GF}$:

Definitie 3.3 We definiëren het puntprodukt $\cdot\cdot\cdot$ op $\mathbf{GF} \times \mathbf{GF}$ door:

$$\begin{aligned}
\eta^{(-p,a)}\cdot\eta^{(-q,b)} &:= 0 \\
\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)}\cdot\eta^{(q+1,\beta)}_{(\nu)} &:= \eta^{(p+q+1,\alpha+\beta)}_{(\mu+\nu)} \\
\eta^{(p+1,\alpha)}_{(\mu)}\cdot\eta^{(-q,b)} &:= \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} D_{j,p}(\alpha, b, \mu)\eta^{(-q,b)}
\end{aligned}$$

met D als boven:

$$D_{j,p}(\alpha, b, \mu) := \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}[x^p \mathrm{e}^{-i\alpha x - \mu x^2}]\check{\ }\Big|_{x=b}\,.$$

Het puntprodukt zal bilineair en commutatief zijn:

$$\begin{aligned}
(f\cdot\alpha g) &= \alpha(f\cdot g) \\
(f\cdot(g+h)) &= (f\cdot g) + (f\cdot h) \\
(f\cdot g) &= (g\cdot f)\,.
\end{aligned}$$

□

Het produkt van $\eta^{(p+1,a)}_{(0)}$ en $\eta^{(-q,b)}$ is nu te schrijven als

$$\eta^{(p+1,a)}_{(0)}\cdot\eta^{(-q,b)} \quad = \quad \mathrm{e}^{-iab} \sum_{j=0}^{q} \sum_{k=0}^{\min\{p,j\}} \binom{p}{k} \frac{(-ia)^{j-k} b^{p-k}}{(j-k)!} \eta^{(-q+j,b)}\,.$$

Dit puntprodukt komt op $(\mathbf{GF} \cap \mathcal{O}_M) \times \mathbf{GF}$ overeen met het puntprodukt op $\mathcal{O}_M \times \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Immers, beschouw $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \cdot \eta^{(-q,b)}$. Er geldt, voor $\phi \in S(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
&\langle(\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \cdot \eta^{(-q,b)}), \phi\rangle \\
&= \langle \eta^{(-q,b)}, \overline{(\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \cdot \phi)}\rangle \\
&= \frac{1}{(-1)^q q!} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{-i\alpha x - \mu x^2} \overline{\phi(x)} \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q} \delta(x-b) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{q!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q} [x^p \mathrm{e}^{-i\alpha x - \mu x^2} \overline{\phi(x)}] \delta(x-b) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} [x^p \mathrm{e}^{-i\alpha x - \mu x^2}] \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}x^{q-j}} [\overline{\phi(x)}]\check{\ }\Big|_{x=b} \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} [x^p \mathrm{e}^{-i\alpha x - \mu x^2}]\check{\ }\Big|_{x=b} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b) \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}x^{q-j}} [\overline{\phi(x)}] \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{q} \frac{(-1)^{q-j}}{q!} \binom{q}{j} D_{j,p}(\alpha, b, \mu) \langle \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}x^{q-j}} \delta(x-b), \phi\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} D_{j,p}(\alpha, b, \mu) \langle \eta^{(-q,b)}, \phi\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Dit betekent

$$(\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \cdot \eta^{(-q,b)}) = \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} D_{j,p}(\alpha, b, \mu) \eta^{(-q,b)} \ .$$

Dat ook de uitdrukking voor $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \cdot \eta_{(\nu)}^{(q+1,\beta)}$ overeenkomt met het puntprodukt op $O_M \times S'(\mathbb{R})$ is triviaal.

Door eenvoudigweg de basiselementen in te vullen is na te gaan dat nu geldt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_a f \cdot \mathcal{T}_a g &= \mathcal{T}_a(f \cdot g) \ , \\
\mathcal{S}_a f \cdot \mathcal{S}_a g &= \mathcal{S}_a(f \cdot g) \ , \\
\mathcal{D}(f \cdot g) &= \mathcal{D} f \cdot g + f \cdot \mathcal{D} g \ , \\
\mathcal{E}_a f \cdot \mathcal{E}_b g &= \mathcal{E}_{a+b}(f \cdot g) \ , \\
\mathcal{P}(f \cdot g) &= \mathcal{P} f \cdot \mathcal{P} g \ .
\end{aligned}
$$

Verder geldt

$$\langle \mathcal{E}_a f, g\rangle = \langle \mathcal{E}_a e, \overline{f} \cdot g\rangle$$

met $e = \eta_{(0)}^{(1,0)}$. Blijkbaar gedraagt ons puntprodukt zich zoals we van een puntprodukt mogen verwachten. Ook voor de verificatie van deze eigenschappen is het gebruik van een computeralgebra pakket niet overdreven.

3.1.3 Een convolutieprodukt op GF

We kunnen onze ruimte **GF** nu ook voorzien van een convolutieprodukt, door te definiëren, voor alle $u, v \in \mathbf{GF}$,

$$u * v := \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} u \cdot \mathcal{F} v) \ .$$

Omdat $\mathcal{F}$ en het puntprodukt zich 'goed' gedragen, gedraagt dit convolutieprodukt zich ook 'goed'.

3.1.4 Lodders ruimte $\mathbf{GF}_t$ als deelruimte van GF

Lodders ruimte $\mathbf{GF}_t$

De lineaire afbeeldingen en produkten in Lodders ruimte $\mathbf{GF}_t$ zijn zo op de basiselementen $\eta_{(0)}^{(p+1,0)}$ en $\eta^{(-q,0)}$ gedefinieerd, dat voldaan is aan de volgende eisen: Het puntprodukt en het convolutieprodukt zijn bilineair, commutatief en niet gedegenereerd, en het scalair produkt is sesquilineair, anticommutatief en niet gedegenereerd; en

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^2 &= \mathcal{I} \\
\mathcal{F}^2 &= \mathcal{P} \\
\mathcal{D}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{D} &= \mathcal{I} \\
\mathcal{P}\mathcal{D} &= -\mathcal{D}\mathcal{P} \\
i\mathcal{X}\mathcal{F} &= \mathcal{F}\mathcal{D} \\
\mathcal{F}^* &= \mathcal{F}^{-1} \\
\mathcal{D}(f\cdot g) &= \mathcal{D}f\cdot g + f\cdot\mathcal{D}g \\
\mathcal{P}(f\cdot g) &= \mathcal{P}f\cdot\mathcal{P}g \\
f * g &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g) \\
\overline{\langle f, g\rangle} &= \langle \overline{f}, \overline{g}\rangle \\
\langle f, g\rangle &= \langle e, \overline{f}\cdot g\rangle\,,
\end{aligned}$$

waarbij $\mathcal{F}^*$ slaat op de 'geadjungeerde' van $\mathcal{F}$ ten aanzien van het scalair produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. (Zie ook [L, Chapter 2, pp. 7-16].)

De structuur op GF

Met de drie hierboven ingevoerde produkten is **GF** van dezelfde algebraïsche structuur voorzien als Lodders $\mathbf{GF}_t$. Deze produkten zijn uitbreidingen van de overeenkomstige produkten op $\mathbf{GF}_t$. De opgesomde verbanden tussen de operatoren $\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{F}$ en $\mathcal{P}$ en de drie produkten leren dat de algebraïsche structuur van $\mathbf{GF}_t$ behouden blijft onder deze uitbreiding. Ook de commutatie-regels voor de operatoren $\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{F}$ en $\mathcal{P}$ op $\mathbf{GF}_t$ blijven behouden: immers, volgens bijlage D gelden deze regels zelfs op $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3.2 De oplossing van het Cauchy-probleem voor een differentiaaloperator $\mathcal{A}$ van eerste orde in de ruimte GF, uitgedrukt in het puntprodukt

We beschouwen het Cauchy-probleem in **GF** voor $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$ met $\alpha_{2,0} = 0$. $\mathcal{A}$ is dan een differentiaaloperator van eerste orde.

Lemma 3.1 *Als $\mathcal{A} = \mathcal{A}(0, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0})$, met $\alpha_{1,1}$ en $\alpha_{1,0}$ zuiver reëel en òf $\alpha_{1,1} > 0$ en $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \geq 0$ òf $\alpha_{1,1} < 0$ en $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq 0$, dan heeft, voor alle $\phi \in \mathbf{GF}$ het Cauchy-probleem*

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \mathcal{A}u \\
u(0) &= \phi\,,
\end{aligned}$$

met $t \geq 0$, de oplossing

$$u(t) = u_0(t)(\mathcal{S}_{\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t}}\,\mathcal{T}_{-C(t)}\,\phi)\cdot\eta_{(\mu(t))}^{(1,\beta(t))}$$

met

$$C(t) = \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_{1,1}t})$$

en

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \exp[\tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}^3}\{\tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} \\
&\qquad + (\alpha_{1,1}\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + \tfrac{3}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,1}\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}(\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0} + \alpha_{1,0}^2\alpha_{0,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{1,0}\alpha_{0,1})t] \\
\beta(t) &= \tfrac{i}{\alpha_{1,1}^2}\{\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} + (\alpha_{1,1}\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + \alpha_{1,0}\alpha_{0,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,1}\} \\
\mu(t) &= \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}}(1 - \mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t})
\end{aligned}$$

(Merk op dat dit een veralgemenisering is van de in paragraaf 2.7 afgeleide uitdrukking $\mathrm{e}^{t\mathcal{XD}} = \mathcal{S}_{\mathrm{e}^t}$*.)*

Bewijs We formuleren het Cauchy-probleem voor $\mathcal{A} = \mathcal{A}(0, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0})$:

$$\begin{aligned}
u_t - (\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,0})u_x - (\alpha_{0,2}x^2 + \alpha_{0,1}x + \alpha_{0,0})u &= 0 \\
u(x,0) &= \phi(x) .
\end{aligned}$$

Dit probleem kunnen we oplossen met de methode der karakteristieke coördinaten. Voor deze coördinaten σ, τ geldt:

$$\begin{aligned}
\partial_\tau x &= -\alpha_{1,1}x - \alpha_{1,0} \\
x(\sigma,0) &= \sigma
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\partial_\tau t &= 1 \\
t(\sigma,0) &= 0
\end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned}
x(\sigma,\tau) &= (\sigma + \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})\mathrm{e}^{-\alpha_{1,1}\tau} - \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}} \\
&= (\sigma + C(-\tau))\mathrm{e}^{-\alpha_{1,1}\tau} , \\[1em]
t(\sigma,\tau) &= \tau ,
\end{aligned}$$

met

$$C(t) = \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_{1,1}t}) .$$

(Bedenk dat $\alpha_{1,1} \neq 0$.) We zien:

$$\begin{aligned}
\sigma(x,t) &= (x + \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_{1,1}t}))\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} \\
&= (x + C(t))\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} , \\[1em]
\tau(x,t) &= t .
\end{aligned}$$

Het Cauchy-probleem voor $u = u(\sigma, \tau)$ wordt

$$\begin{aligned}
u_\tau &= (\alpha_{0,2}x^2 + \alpha_{0,1}x + \alpha_{0,0})u \\
u(\sigma,0) &= \phi(x(\sigma,0)) ,
\end{aligned}$$

met $x = x(\sigma, \tau)$. Dit geeft

$$u(\sigma,\tau) = \phi(x(\sigma,0)) \exp \int_0^\tau \{\alpha_{0,2}x(\sigma,t)^2 + \alpha_{0,1}x(\sigma,t) + \alpha_{0,0}\}\mathrm{d}t ,$$

Nu geldt, omdat $t = -\frac{1}{\alpha_{1,1}} \log \frac{\alpha_{1,1}x+\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}\sigma+\alpha_{1,0}}$, met $\beta_1 = \alpha_{1,0}\alpha_{0,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,1}$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\tau \{\alpha_{0,2}x(\sigma,t)^2 + \alpha_{0,1}x(\sigma,t) + \alpha_{0,0}\}\mathrm{d}t \\
&= -\int_\sigma^x \frac{\alpha_{0,2}\xi^2 + \alpha_{0,1}\xi + \alpha_{0,0}}{\alpha_{1,1}\xi + \alpha_{1,0}}\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{\alpha_{1,1}^2} \int_\sigma^x [\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}\xi - \beta_1 + \tfrac{\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0}+\beta_1\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}\xi+\alpha_{1,0}}]\mathrm{d}\xi \\
&= -\tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}[\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}\xi^2 - \beta_1\xi + \tfrac{1}{\alpha_{1,1}}(\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0} + \beta_1\alpha_{1,0}) \log(\alpha_{1,1}\xi + \alpha_{1,0})]|_\sigma^x \\
&= -\tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}[\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}(x^2 - (x + C(t))^2\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t}) - \beta_1(x - (x + C(t))\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t}) \\
&\qquad + \tfrac{1}{\alpha_{1,1}}(\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0} + \beta_1\alpha_{1,0}) \log \tfrac{\alpha_{1,1}x+\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}\sigma+\alpha_{1,0}}] \\
&= -\tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}[\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}(1 - \mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t})x^2 + \{-\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}C(t)\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} - \beta_1(1 - \mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t})\}x \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}C(t)^2\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} + \beta_1C(t)\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}} - (\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0} + \beta_1\alpha_{1,0})t]
\end{aligned}
$$

Substitutie van

$$
\begin{aligned}
&-\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}C(t)\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} - \beta_1(1 - \mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t}) \\
&= -\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} + (2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,1})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} - \beta_1
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,1}\alpha_{0,2}C(t)^2\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} + \beta_1C(t)\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}} \\
&= \tfrac{1}{\alpha_{1,1}}\{-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}^2\alpha_{0,2}(e^{2\alpha_{1,1}t} - 2\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + 1) + \alpha_{1,0}\beta_1e^{\alpha_{1,1}t} - \alpha_{1,0}\beta_1\} \\
&= \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}\{-\tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}e^{2\alpha_{1,1}t} + (2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,1})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} - \beta_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\}
\end{aligned}
$$

in de uitdrukking voor $\int_0^\tau\{\alpha_{0,2}x^2 + \alpha_{0,1}x + \alpha_{0,0}\}\mathrm{d}t$ geeft

$$
\begin{aligned}
&\exp\int_0^\tau \{\alpha_{0,2}x(\sigma,t)^2 + \alpha_{0,1}x(\sigma,t) + \alpha_{0,0}\}\mathrm{d}t \\
&= \exp[-\tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}}(1 - \mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t})x^2 + \tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}\{\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} + (\alpha_{1,1}\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + \beta_1\}x \\
&\qquad + \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}^3}\{\tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}e^{2\alpha_{1,1}t} + (\alpha_{1,1}\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + \beta_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}(\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0} + \beta_1\alpha_{1,0})t] \\
&= u_0(t)\eta_{(\mu(t))}^{(1,\beta(t))}
\end{aligned}
$$

met

$$
\begin{aligned}
u_0(t) &= \exp\{\tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}^3}\{\tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}e^{2\alpha_{1,1}t} + (\alpha_{1,1}\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + \beta_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{\alpha_{1,1}^2}(\alpha_{1,1}^2\alpha_{0,0} + \beta_1\alpha_{1,0})t\} \\
\beta(t) &= \tfrac{i}{\alpha_{1,1}^2}\{\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}\mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t} + (\alpha_{1,1}\alpha_{0,1} - 2\alpha_{1,0}\alpha_{0,2})\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t} + \beta_1\} \\
\mu(t) &= \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}}(1 - \mathrm{e}^{2\alpha_{1,1}t})\,.
\end{aligned}
$$

Immers, omdat òf $\alpha_{1,1} > 0$ en $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \geq 0$ òf $\alpha_{1,1} < 0$ en $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq 0$, geldt dat $\mathrm{Re}(\mu(t)) \geq 0$ voor $t \geq 0$. Verder, als $\mu(t) = 0$, dan $t = 0$, terwijl $\beta(0) = 0$.

Verder geldt, omdat $\alpha_{1,1}$ en $\alpha_{1,0}$ zuiver reëel,

$$
\begin{aligned}
\phi(x(\sigma,0)) &= \phi(\sigma) \\
&= \phi((x + C(t))\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t}) \\
&= \mathcal{S}_{\mathrm{e}^{\alpha_{1,1}t}}\, \mathcal{T}_{-C(t)}\, \phi\,.
\end{aligned}
$$

Voor $u(x,t)$ kunnen we nu schrijven

$$u(x,t) = u_0(t)(\mathcal{S}_{e^{\alpha_{1,1}t}}\, \mathcal{T}_{-C(t)}\, \phi)(x) \cdot \eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))}(x)$$

□

We beschouwen vervolgens het Cauchy-probleem met $\alpha_{1,1} = 0$.

Lemma 3.2 *Als* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(0, 0, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0})$, *met* $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,2} \neq 0$ *en* $\alpha_{1,0}$ *zuiver reëel terwijl* $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq 0$ *dan heeft, voor alle* $\phi \in \mathbf{GF}$, *het Cauchy-probleem*

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u &= \mathcal{A} u \\ u(0) &= \phi\,, \end{aligned}$$

met $t \in \mathbb{R}$, *de oplossing*

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\alpha_{1,0}^2 \alpha_{0,2} t^3 + \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,1} t^2 + \alpha_{0,0} t}\, (\mathcal{T}_{-\alpha_{1,0}t}\phi)(x) \cdot \eta^{(1,\beta(t))}_{(\mu(t))}\,,$$

met

$$\begin{aligned} \beta(t) &= i(\alpha_{1,0}\alpha_{0,2} t^2 + \alpha_{0,1} t) \\ \mu(t) &= -\alpha_{0,2} t\,, \end{aligned}$$

in het gebied $t \in \mathbb{R}$ *(als* $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = 0$*) of in het gebied* $t \geq 0$ *(als* $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) < 0$*). (Merk op dat dit een veralgemenisering is van de in paragraaf 2.7 afgeleide uitdrukking* $\mathrm{e}^{t\mathcal{D}} = \mathcal{T}_{-t}$*.)*
Bewijs We formuleren het Cauchy-probleem voor $\mathcal{A} = \mathcal{A}(0, 0, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,0})$:

$$\begin{aligned} u_t - \alpha_{1,0} u_x - (\alpha_{0,2} x^2 + \alpha_{0,1} x + \alpha_{0,0}) u &= 0 \\ u(x,0) &= \phi(x)\,. \end{aligned}$$

Ook dìt probleem kunnen we oplossen met de methode der karakteristieke coördinaten. Voor deze coördinaten σ, τ geldt:

$$\begin{aligned} \partial_\tau x &= -\alpha_{1,0} \\ x(\sigma, 0) &= \sigma \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \partial_\tau t &= 1 \\ t(\sigma, 0) &= 0 \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} x(\sigma, \tau) &= -\alpha_{1,0}\tau + \sigma \\ t(\sigma, \tau) &= \tau\,, \end{aligned}$$

We zien:

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= x + \alpha_{1,0} t\,, \\ \tau(x,t) &= t\,. \end{aligned}$$

Het Cauchy-probleem voor $u = u(\sigma, \tau)$ wordt

$$\begin{aligned} u_\tau &= (\alpha_{0,2} x^2 + \alpha_{0,1} x + \alpha_{0,0}) u \\ u(\sigma, 0) &= \phi(x(\sigma, 0))\,, \end{aligned}$$

met $x = x(\sigma, \tau)$. Dit geeft

$$u(\sigma, \tau) = \phi(x(\sigma, 0)) \exp \int_0^\tau \{\alpha_{0,2} x(\sigma, t)^2 + \alpha_{0,1} x(\sigma, t) + \alpha_{0,0}\} \mathrm{d}t\,,$$

Nu geldt, omdat $t = \frac{1}{\alpha_{1,0}}(\sigma - x)$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \{\alpha_{0,2}x(\sigma,t)^2 + \alpha_{0,1}x(\sigma,t) + \alpha_{0,0}\}\mathrm{d}t \\
&\quad = -\tfrac{1}{\alpha_{1,0}}\int_\sigma^x (\alpha_{0,2}\xi^2 + \alpha_{0,1}\xi + \alpha_{0,0})\mathrm{d}\xi \\
&\quad = -\tfrac{\alpha_{0,2}}{3\alpha_{1,0}}(x^3-\sigma^3) - \tfrac{\alpha_{0,1}}{2\alpha_{1,0}}(x^2-\sigma^2) - \tfrac{\alpha_{0,0}}{\alpha_{1,0}}(x-\sigma) \\
&\quad = \alpha_{0,2}tx^2 + (\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}t^2 + \alpha_{0,1}t)x + \tfrac{1}{3}\alpha_{1,0}^2\alpha_{0,2}t^3 + \tfrac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,1}t^2 + \alpha_{0,0}t
\end{aligned}$$

Verder geldt, omdat $\alpha_{1,0}$ zuiver reëel,

$$\begin{aligned}
\phi(x(\sigma,0)) &= \phi(\sigma) \\
&= \phi(x + \alpha_{1,0}t) \\
&= \mathcal{T}_{-\alpha_{1,0}t}\phi\,.
\end{aligned}$$

Voor $u(x,t)$ kunnen we nu schrijven

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\alpha_{1,0}^2\alpha_{0,2}t^3 + \frac{1}{2}\alpha_{1,0}\alpha_{0,1}t^2 + \alpha_{0,0}t}\,(\mathcal{T}_{-\alpha_{1,0}t}\phi)(x)\cdot\eta_{(\mu(t))}^{(1,\beta(t))}\,,$$

met

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= i(\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}t^2 + \alpha_{0,1}t) \\
\mu(t) &= -\alpha_{0,2}t\,,
\end{aligned}$$

immers, als $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) < 0$; dan, voor alle $t \geq 0$ $\mathrm{Re}(\mu(t)) \geq 0$. Verder, als $\mu(t) = 0$, dan $t = 0$ en dus $\beta(t) = 0 \in \mathbb{R}$. In het geval dat $\alpha_{0,2} \neq 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = 0$, dan voor alle $t \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Re}(\mu(t)) \geq 0$. $\square$

3.3 Aanbevelingen: Wegen naar eventuele scherpere resultaten

Inleiding

Het lijkt wenselijk een nieuwe basis voor **GF** te kiezen. Hier enige overwegingen van heuristische aard, die aanleiding geven tot deze wens. Verder spreken we vermoedens uit over de mogelijkheid op deze (of een andere) manier scherpere resultaten te boeken.

3.3.1 Een nieuw basiselement voor GF

Er geldt:

$$\lim_{\mu\to\infty} \tfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\eta_{(\mu)}^{(1,0)} = \eta^{(0,0)}$$

in **GF**-zin. Immers: Er geldt (zie [G&S, Beispiel 2, p. 45])

$$\lim_{t\downarrow 0} \tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-\tfrac{x^2}{4t}) = \delta(x)$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu\to\infty} \tfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\eta_{(\mu)}^{(1,0)} &= \lim_{\mu\to\infty} \tfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mu x^2} \\
&= \delta(x) \\
&= \eta^{(0,0)}\,.
\end{aligned}$$

Met de uitdrukking voor de Fourier-getransformeerde van $\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)}$, en met de continuïteit van $\mathcal{F}$, vinden we meer algemene resultaten: voor $(\mu,\alpha) \to (0,a)$:

$$\begin{aligned} & i^p 2^{-\frac{1}{2}-p} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4\mu}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}k} H_{p-k}(-\tfrac{\alpha}{2\sqrt{\mu}}) \eta_{(\frac{1}{4\mu})}^{(k+1,\frac{i\alpha}{2\mu})} \\ = \quad & \mathcal{F}\eta_{(\mu)}^{(p+1,\alpha)} \\ \to \quad & \mathcal{F}\eta_{(0)}^{(p+1,a)} \\ = \quad & \sqrt{2\pi} p! i^p \eta^{(-p,a)} \,. \end{aligned}$$

Blijkbaar ligt $\eta^{(-p,a)}$ op de 'rand' van $\mathbf{GF}_+$. We kunnen dit in de parametrisering van de basis tot uitdrukking laten komen, en schrijven

$$\xi_{(\nu)}^{(1,0)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}\eta_{(\mu)}^{(1,0)} & \text{als } \nu \neq -1, \\ \eta^{(0,0)} & \text{als } \nu = -1. \end{cases}$$

Hierbij is $\nu = \frac{1-2\mu}{1+2\mu}$, $|\nu| \leq -1$. Voor $\xi_{(\nu)}^{(1,0)}$ geldt dus

$$\xi_{(\nu)}^{(1,0)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{1+\nu}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}x^2} & \text{als } \nu \neq -1, \\ \delta(x) & \text{als } \nu = -1. \end{cases}$$

De nieuwe parameter ν is het beeld van μ onder de conforme afbeelding: $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{C}$: $\mu \to \frac{1-2\mu}{1+2\mu}$. Over deze afbeelding het volgende. Volgens [K, p. 9] geldt

$$\{\frac{1-2\mu}{1+2\mu} \mid \mathrm{Re}(\mu) \geq 0\} = \{\nu \in \mathbb{C} \mid |\nu| \leq 1\,, \nu \neq -1\}\,.$$

Schrijf $\nu = \nu(\mu)$. Dan $\mu = \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}$, en

$$\begin{aligned} \nu(0) &= 1\,, \\ \nu(\tfrac{1}{2}) &= 0\,, \\ \nu(\infty) &= -1\,, \\ \nu(-\tfrac{1}{2}i) &= i\,, \\ \nu(\tfrac{1}{2}i) &= -i\,, \\ \nu(-\tfrac{1}{4}(1 \pm \sqrt{17})) &= -\tfrac{1}{4}(1 \pm \sqrt{17})\,. \end{aligned}$$

Verder: $\nu(\mu)$ beeldt de rechte $\mathrm{Re}(\mu) = x$ af op de cirkel $|\nu - \frac{-2x}{2x+1}| = \frac{1}{|2x+1|}$. Deze cirkels raken de lijn $\mathrm{Im}(\nu) = -1$ in $\nu = -1$. De rechte $\mathrm{Im}(\mu) = y$ wordt afgebeeld op de cirkel $|\nu - \frac{i-2y}{2y}| = \frac{1}{|2y|}$. Deze cirkels raken de reële as in $\nu = -1$. In het bijzonder: $\nu([0,\infty)) = (-1,1]$ en $\nu(\mu)$ beeldt de positieve imaginaire as af op de onderste helft van de rand van de eenheidscirkel.

3.3.2 Het omzeilen van singuliere punten

Wanneer we er in zouden slagen ook de overige basiselementen $\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)}$ in een nieuwe, niet al te wilde, basis uit te drukken, dan verwachten we dat de oplossing van het Cauchy-probleem er mooier uit ziet. De problemen die optraden bij het bepalen van het existentie-interval voor golfachtige A, leken niet van essentiële aard: De oplossing kan, zoals we immers zagen bij de oplossing van de Schrödinger-vergelijking voor de harmonische oscillator, bestaan op $I_{\underline{\alpha}}$, terwijl de representatie van deze oplossing in de basis $\eta_{(\mu)}^{(j,\alpha)}$ niet continu van de parameters afhangt. Deze parameters blijken dus niet de beste.

Een mogelijk alternatief voor het invoeren van een nieuwe basis, is het asymptotisch gedrag van de oplossing te onderzoeken voor t dicht bij de rand van het eindige existentie-interval. We verwachten dat de oplossing dan naar een lineaire combinatie van elementen van $\mathbf{GF}_-$ zal gaan.

3.3.3 Globale existentie onder zwakkere condities

We vermoeden, op grond van overwegingen van groepentheoretische aard, dat de voorwaarde 'A golfachtig of diffusieachtig' voldoende is voor globale existentie van de oplossing van het Cauchy-probleem in **GF**.

Merk echter op dat, volgens 2.3, onder zekere voorwaarden het Cauchy-probleem met beginvoorwaarde $\eta_{(\mu(0))}^{(p+1,\beta(0))}$, een oplossing op $I_{\underline{\alpha}}$ heeft van de vorm

$$u(t) = \sum_{j=0}^{p} v_j(t) \eta_{(\mu(t))}^{(j+1,\beta(t))} .$$

Nu geldt dat, voor $|x| \to \infty$,

$$\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}(x) = O(\eta_{(\mu)}^{(j+2,\beta)}(x))$$

dus, als $\eta_{(\mu(0))}^{(p+1,\beta(0))} \in H_k$, voor zekere $k \in \mathbb{Z}$, met H_k als in paragraaf 1.4.2, dan voor alle $t \in I_{\underline{\alpha}}$

$$u(t) \quad \in \quad H_k .$$

Dit is echter niet nodig voor globale existentie in **GF**, we eisen slechts dat $u(t) \in \mathbf{GF}$ voor alle t. Dit doet het vermoeden rijzen dat we, om globale existentie in **GF** te bewijzen, zelfs met mìnder scherpe voorwaarden op de coëfficiënt $\underline{\alpha}$ toe kunnen.

3.4 Conclusies

In hoofdstuk 1 is existentie en éénduidigheid van de oplossing van het Cauchy-probleem in $S'(\mathbb{R})$ aangetoond voor twee klassen van evolutievergelijkingen: 'golfachtige' en 'diffusieachtige'. De existentie-stelling van De Graaf is hierbij een zeer bruikbaar hulpmiddel gebleken. Dat deze stelling is geformuleerd voor Hilbert-ruimten is, in deze context, geen wezenlijke beperking: We kunnen $S'(\mathbb{R})$ immers als een inductieve limiet van Hilbert-ruimten schrijven.

In hoofdstuk 2 is de ruimte **GF** geïntroduceerd. Het is mogelijk gebleken, onder zekere voorwaarden op de differentiaal-operator $\mathcal{A}$, een expliciete uitdrukking voor de oplossing van ons Cauchy-probleem in de ruimte **GF** te geven. Deze oplossing bestaat op het maximale existentie-interval $I_{\underline{\alpha}}$: Het existentie-interval dat we ook voor de oplossing in $S'(\mathbb{R})$ vonden.

Scherpere resultaten lijken echter, op grond van de overwegingen in de vorige paragraaf, haalbaar. Een mogelijke aanpak is daarbij het introduceren van een nieuwe basis voor de ruimte **GF**, die meer recht doet aan de topologische structuur van deze ruimte, zoals ik in de vorige paragraaf heb aangegeven. In de mij toegemeten tijd ben ik er niet in geslaagd zo'n basis te vinden. Ik hoop dat ooit nog iemand aan het oplossen van dit probleem zoveel plezier beleeft als het lijkt te bieden. Het ziet er immers zeer interessant uit.

Bijlage A

De Hermite-polynomen

A.1 Definitie van Hermite-polynomen en Hermite-functies

We introduceren, c.f. [A&S, 22.3.10], voor $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{C}$ de *Hermite-polynomen* $H_n(x)$:

$$H_n(x) \quad := \quad \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]} \frac{n!}{k!(n-2k)!}(-1)^k (2x)^{n-2k}$$

waar $[\frac{1}{2}n]$ staat voor de entier van $\frac{1}{2}n$: $[\frac{1}{2}n] = \frac{1}{2}n$ als n even is, en $[\frac{1}{2}n] = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ als n oneven is.
De variabele x zal nu reëel zijn. We definiëren de *Hermite-functies* ψ_n:

$$\psi_n(x) := (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) \, .$$

A.2 Enige eigenschappen van de Hermite-polynomen

We memoreren enige eigenschappen van de Hermite-polynomen. Als eerste geven we, c.f. [A&S, 22.11.7, p. 785] de volgende Rodrigues-uitdrukking

$$H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \, ,$$

Verder geldt, volgens [A&S, 22.7.13 en 22.8.7],

$$H_n'(x) \quad = \quad 2nH_{n-1}(x) \, , \tag{A.1}$$

$$2xH_n(x) \quad = \quad 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \, . \tag{A.2}$$

Volgens [A&S, 22.9.17, p. 784], heeft $H_n(x)$ de volgende genererende functie:

$$\mathrm{e}^{2xz-z^2} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} H_k(x) z^k \, , \tag{A.3}$$

met $z \in \mathbb{C}$.

A.3 Twee ontwikkelingen naar Hermite-polynomen

Lemma A.1 *Er geldt, voor $x \in \mathbb{C}$,*

$$H_p(x+a) \quad = \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (2a)^{p-k} H_k(x)$$

Bewijs Met gelijkheid A.3 volgt, voor $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{1}{p!} H_p(x+a) z^p &= \mathrm{e}^{2(x+a)z - z^2} \\
&= \mathrm{e}^{2az} \mathrm{e}^{2xz - z^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} (2a)^n z^n \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} H_k(x) z^k \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \tfrac{1}{(p-k)!} \tfrac{1}{k!} (2a)^{p-k} H_k(x) z^p \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (2a)^{p-k} H_k(x) z^p \,.
\end{aligned}$$

Dit geeft

$$H_p(x+a) \quad = \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (2a)^{p-k} H_k(x) \,.$$

Dit is een gelijkheid van twee reële polynomen. Dus ook voor $x \in \mathbb{C}$ geldt deze gelijkheid. □

Lemma A.2 *Er geldt, voor* $a, x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
H_p(ax) &= \sum_{n=0}^{[\frac{1}{2}p]} \tfrac{p!}{n!(p-2n)!} (a^2-1)^n a^{p-2n} H_{p-2n}(x) \\
&= a^p \sum_{n=0}^{[\frac{1}{2}p]} \tfrac{p!}{n!(p-2n)!} (1-a^{-2})^n H_{p-2n}(x)
\end{aligned}$$

Bewijs Met gelijkheid A.3 volgt, voor $a, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} \tfrac{1}{p!} H_p(ax) z^p &= \mathrm{e}^{2axz - z^2} \\
&= \mathrm{e}^{(a^2-1)z^2} \mathrm{e}^{2xaz - (az)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} (a^2-1)^n z^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} a^k H_k(x) z^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tfrac{1}{n!} (a^2-1)^n a^k H_k(x) z^{2n+k} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{[\frac{1}{2}p]} \tfrac{1}{(p-2n)!} \tfrac{1}{n!} (a^2-1)^n a^{p-2n} H_{p-2n}(x) z^p \,.
\end{aligned}$$

Dit geeft, op dezelfde gronden als bij lemma A.1, het gestelde. □

Bijlage B

De operator $\mathcal{Q}$ en zijn inverse

Inleiding

We introduceren in paragraaf B.1 een operator $\mathcal{T}$ en tonen in paragraaf B.2 aan dat $\mathcal{T}$ een Hilbert-Schmidt-operator is. Daarna laten we, in paragraaf B.3, zien dat $\mathcal{T}$ de inverse van de operator $\mathcal{Q}$ is, en tonen we in paragraaf B.4 aan dat $\mathcal{Q}$ positief is. We zullen ons op een zuinig standpunt stellen, en bewijzen dat $\mathcal{Q}^{-1}$ een Hilbert-Schmidt-operator is, zònder gebruik te maken van de Hermite-basis van $L_2(\mathbb{R})$.

We geven de gegeneraliseerde afgeleide van zekere meetbare en absoluut continue v aan met ∂v. We schrijven, voor $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{erfc}x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \,.$$

Er geldt, voor alle $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{erfc}x + \mathrm{erfc}(-x) = 2$, $\mathrm{erfc}x$ is dalend, $\mathrm{erfc}(0) = 1$ en $\mathrm{erfc}x < 2$.

We schrijven, c.f. definitie 1.2 voor alle $f \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R}) = D(\mathcal{Q})$

$$\mathcal{Q}f = (\mathcal{X}^2 - \mathcal{D}^2 + 1)f \,.$$

De operator $\mathcal{Q}$ is, volgens lemma 1.3, een operator in $L_2(\mathbb{R})$. Merk op dat $\mathcal{Q}$ te schrijven is als $\mathcal{Q} = (\mathcal{X} + \mathcal{D})(\mathcal{X} - \mathcal{D})$. Hiermee is de gewone differentiaalvergelijking

$$\mathcal{Q}u \quad = \quad f$$

op te lossen. Op deze manier is de expliciete uitdrukking voor de operator $\mathcal{T}$ te vinden.

B.1 De operator $\mathcal{T}$

Lemma B.1 *Er geldt, voor $x > 0$,*

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{\pi}(x + \frac{1}{2}\sqrt{2})} \leq \mathrm{erfc}x \leq \min\{\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}, 1\} \,.$$

Bewijs Er geldt, volgens [A&S, (7.1.13), p. 298], voor $x \geq 0$:

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2}} < \mathrm{e}^{x^2} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{\pi}}} \,.$$

Met $\mathrm{erfc}x$ is dalend en $\mathrm{erfc}(0) = 1$ geeft dit de gestelde ongelijkheden. $\square$

Definitie B.1 We definiëren de functie $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$G(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(-x)\,\mathrm{erfc}y & \text{als } x < y \\ \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}x\,\mathrm{erfc}(-y) & \text{als } x \geq y\,. \end{cases}$$

□

Merk op dat

$$G(x,y) = G(y,x) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Met lemma B.1 vinden we de volgende ongelijkheden voor $G(x,y)$:

Lemma B.2 *Er geldt, voor* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 < G(x,y) \leq \begin{cases} \frac{C_0}{1+y}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x^2+y^2)} & (0 \leq x \leq y) \\ \frac{C_0^2}{\sqrt{\pi}(1-x)(1+y)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & (x \leq 0 \leq y) \\ \frac{C_0}{1-x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2)} & (x \leq y \leq 0)\,. \end{cases}$$

met $C_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0^2}$ *waar* $x_0 > 0$ *en* $\sqrt{\pi}x_0\mathrm{e}^{x_0^2} = 1$.

Bewijs Bedenk dat x_0 bestaat: $0,45 < x_0 < 0,46$. Voor alle $x > 0$ geldt

$$\min\{\mathrm{e}^{x^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}x}\} \leq \frac{(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0^2}}{x+1}$$

Met lemma B.1 vinden we, voor $0 < x < y$:

$$\begin{aligned} G(x,y) &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x^2+y^2)}\min\{\mathrm{e}^{y^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}y}\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x^2+y^2)}\frac{1+x_0}{1+y}\mathrm{e}^{x_0^2}\,. \end{aligned}$$

Voor $x < 0 < y$ geldt

$$\begin{aligned} G(x,y) &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\min\{\mathrm{e}^{x^2}, \frac{1}{-\sqrt{\pi}x}\}\min\{\mathrm{e}^{y^2}, \frac{1}{\sqrt{\pi}y}\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\frac{1+x_0}{1-x}\mathrm{e}^{x_0^2}\frac{1+x_0}{1+y}\mathrm{e}^{x_0^2}\,, \end{aligned}$$

terwijl voor $x < y < 0$ geldt

$$\begin{aligned} G(x,y) &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2)}\min\{\mathrm{e}^{x^2}, \frac{1}{-\sqrt{\pi}x}\} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-y^2)}\frac{1+x_0}{1-x}\mathrm{e}^{x_0^2}\,. \end{aligned}$$

Eenvoudig is in te zien dat bovenstaande ongelijkheden ook gelden voor $0 \leq x \leq y$, $x \leq 0 \leq y$, respectievelijk $x \leq y \leq 0$. □

Met gebruikmaking van de symmetrie-eigenschap van $G(x,y)$ heeft bovenstaande ongelijkheid betekenis voor iedere $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Omdat $\frac{C_0^2}{\sqrt{\pi}} < C_0$ volgt uit lemma B.2

$$0 < G(x,y) < \frac{C_0}{|x|+1} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{B.1}$$

Definitie B.2 We definiëren voor alle $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{T}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)f(y)\mathrm{d}y\,.$$

□

B.2 De operator $\mathcal{T}$ is begrensd

Stelling B.1 *$\mathcal{T}$, met $D(\mathcal{T}) = L_2(\mathbb{R})$, is een Hilbert-Schmidt-operator op $L_2(\mathbb{R})$.*
Bewijs Volgens [W, Theorem 6.11, p. 139], betekent het gestelde: $G(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$, i.e.

$$I_n := \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} |G(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

convergeert voor $n \to \infty$.

Schrijf

$$H(t) := \begin{cases} 0 & (t \geq 0) \\ 1 & (t < 0)\,. \end{cases}$$

Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi}{16}\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{(x^2+y^2)}\,[\mathrm{erfc}(-x)\,\mathrm{erfc}y\,H(y-x) \;+\; \mathrm{erfc}x\,\mathrm{erfc}(-y)\,H(x-y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{16}\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{(x^2+y^2)}\,[\mathrm{erfc}^2(-x)\,\mathrm{erfc}^2y\,H(y-x) \;+\; \mathrm{erfc}^2x\,\mathrm{erfc}^2(-y)\,H(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{16}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{y^2}\,[\mathrm{erfc}^2y\int_{-n}^{y}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}^2(-x)\mathrm{d}x \;+\; \mathrm{erfc}^2(-y)\int_{y}^{n}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}^2x\,\mathrm{d}x]\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Schrijf nu

$$F_n(y) := \int_y^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}^2x\,\mathrm{d}x$$

en merk op dat

$$\begin{aligned} \int_{-n}^{y} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}^2(-x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{n}^{-y}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{erfc}^2t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-y}^{n}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}^2x\,\mathrm{d}x \\ &= F_n(-y)\,, \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi}{16}\int_{-n}^{n}\mathrm{e}^{y^2}\,(\mathrm{erfc}^2yF_n(-y) \;+\; \mathrm{erfc}^2(-y)F_n(y))\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{16}\int_{-n}^{n}\mathrm{e}^{y^2}\,(\mathrm{erfc}^2(-y)F_n(y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{16}(\int_{-n}^{-1}+\int_{-1}^{1}+\int_{1}^{n})\mathrm{e}^{y^2}\,(\mathrm{erfc}^2(-y)F_n(y)\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

We schatten I_n. Lemma B.1 geeft

$$\begin{aligned} I_n &\leq \frac{\pi}{8}\int_{-n}^{-1}\mathrm{e}^{y^2}\,\frac{1}{\pi y^2}\mathrm{e}^{-2y^2}F_n(y)\mathrm{d}y + \frac{\pi}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}\,\mathrm{erfc}^2(-1)\,F_n(y)\mathrm{d}y + \frac{\pi}{2}\int_1^n \mathrm{e}^{y^2}\,F_n(y)\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{8}\int_{-n}^{-1}\frac{1}{y^2}\,\mathrm{e}^{-y^2}F_n(y)\mathrm{d}y \;+\; \frac{\pi}{8}\mathrm{erfc}^2(-1)\int_{-1}^{1}F_n(y)\mathrm{d}y \;+\; \frac{\pi}{2}\int_1^n \mathrm{e}^{y^2}\,F_n(y)\mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{B.2}$$

We schatten $F_n(y)$. Voor $(n,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, 1 \le y \le n$ geldt, met lemma B.1,

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \int_y^n \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{\pi} \int_y^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{\pi x} \mathrm{e}^{-x^2} \right]_y^\infty - \frac{2}{\pi} \int_y^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi y} \mathrm{e}^{-y^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc} y \\
&= O(1) \mathrm{e}^{-y^2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \right) \\
&= O(1) \mathrm{e}^{-y^2} \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{y(y + \frac{1}{2}\sqrt{2})} \right) \\
&= O(1) \frac{1}{y^2} \mathrm{e}^{-y^2} \, .
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Voor $(n,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, -1 \le y \le 1$ geldt, met lemma B.1 en (B.3),

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \int_y^n \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x \\
&\le \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x + \int_1^n \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x \\
&\le 2\mathrm{e} \operatorname{erfc}^2(-1) + \frac{1}{\mathrm{e}} O(1) \\
&= O(1) \, .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Voor $(n,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, -n \le y \le -1$ geldt,

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \int_y^{-1} \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x + \int_1^n \mathrm{e}^{x^2} \operatorname{erfc}^2 x \, \mathrm{d}x \\
&\le O(1) \int_y^{-1} \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x + O(1) \\
&\le O(1) \int_y^{-1} -2x\mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x + O(1) \\
&= O(1) \left[\mathrm{e}^{x^2} \right]_y^{-1} + O(1) \\
&= O(1)(\mathrm{e}^{y^2} + 1) \, .
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Substitie van (B.3), (B.4) en (B.5) in (B.2) geeft nu, voor $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
I_n &= O(1) \int_{-n}^{-1} \frac{1}{y^2} \mathrm{e}^{-y^2} (\mathrm{e}^{y^2} + 1) \mathrm{d}y + \int_{-1}^1 O(1) \mathrm{d}y + O(1) \int_1^n \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \\
&= O(1) \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{y^2} \mathrm{e}^{-y^2} (\mathrm{e}^{y^2} + 1) \mathrm{d}y + \int_{-1}^1 O(1) \mathrm{d}y + O(1) \int_1^\infty \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \\
&= O(1) \, .
\end{aligned}$$

Dus voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$I_n \le C$$

voor zekere $C > 0$. Verder: I_n is monotoon niet-dalend, dus $\lim_{n \to \infty} I_n$ bestaat. We concluderen: $\mathcal{T}$ is een Hilbert-Schmidt-operator. □

Volgens [W, paragraaf 4.1, voorbeeld 2, p. 55] geldt nu

Stelling B.2 *De operator $\mathcal{T}$ is begrensd.* □

B.3 De operator $\mathcal{T}$ is de inverse van $\mathcal{Q}$

Lemma B.3 *Er geldt, voor $x \lesseqgtr y$*

$$G_y(x,y) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(\mp x)\,[y\mathrm{erfc}(\pm y) \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}]$$

en, voor alle $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{|y|\to\infty} |G_y(x,y)| = 0$.

Bewijs Voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \lesseqgtr y$ geldt

$$\begin{aligned} G_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(\mp x)\,\mathrm{erfc}(\pm y) \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(\mp x)\,[y\mathrm{erfc}(\pm y) \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}]\,. \end{aligned}$$

Dus, voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |y| > |x|, x \lesseqgtr y$, met lemma B.1

$$\begin{aligned} |G_y(x,y)| &= O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\,[|y\mathrm{erfc}(\pm y)| + |\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}|] \\ &= O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\,[O(1)\frac{y}{|y|}\mathrm{e}^{-y^2} + O(1)\mathrm{e}^{-y^2}] \\ &= O(1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\,. \end{aligned}$$

Dit geeft de gevraagde limiet. □

Stelling B.3 *Voor alle $u \in D(\mathcal{Q})$ geldt*

$$\mathcal{T}\mathcal{Q}u = u\,.$$

Bewijs Zij $u \in D(\mathcal{Q})$. Er geldt, omdat $\breve{\rceil}_{x\in\mathbb{R}} x^2 u(x) \in L_2(\mathbb{R})$ en $\partial^2 u \in L_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}\mathcal{Q}u)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)(\mathcal{Q}u)(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [G(x,y)(1+y^2)u(y) - G(x,y)\partial^2 u(y)]\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)(1+y^2)u(y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)\partial^2 u(y)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{B.6}$$

bijna overal. We beschouwen de tweede term. Bedenk dat G, u en ∂u continu zijn. Verder geldt, volgens lemma B.3, $\lim_{|y|\to\infty} G_y(x,y) = 0$; volgens (B.1) $\lim_{|y|\to\infty} G(x,y) = 0$, en omdat

$u \in W_2^2(\mathbb{R})$ $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ en $\lim_{|x|\to\infty} \partial u(x) = 0$. Met dit alles vinden we

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)\partial^2 u(y)\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-\infty}^{x-} G(x,y)\partial^2 u(y)\mathrm{d}y + \int_{x+}^{\infty} G(x,y)\partial^2 u(y)\mathrm{d}y \\
&= [G(x,y)\partial u(y)]_{y=-\infty}^{x-} - \int_{-\infty}^{x-} G_y(x,y)\partial u(y)\mathrm{d}y + [G(x,y)\partial u(y)]_{y=x+}^{\infty} \\
&\qquad - \int_{x+}^{\infty} G_y(x,y)\partial u(y)\mathrm{d}y \\
&= -\int_{-\infty}^{x-} G_y(x,y)\partial u(y)\mathrm{d}y - \int_{x+}^{\infty} G_y(x,y)\partial u(y)\mathrm{d}y \\
&= [-G_y(x,y)u(y)]_{y=-\infty}^{x-} + \int_{-\infty}^{x-} G_{yy}(x,y)u(y)\mathrm{d}y + [-G_y(x,y)u(y)]_{y=x+}^{\infty} \\
&\qquad + \int_{x+}^{\infty} G_{yy}(x,y)u(y)\mathrm{d}y \\
&= -(G_y(x,x-) - G_y(x,x+))u(x) + (\int_{-\infty}^{x-} + \int_{x+}^{\infty})G_{yy}(x,y)u(y)\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{B.7}$$

bijna overal. We berekenen, voor $x \neq y$, $G_{yy}(x,y)$. Er geldt, met lemma B.3, voor $x \lesseqgtr y$

$$\begin{aligned}
&G_{yy}(x,y) = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(\mp x)\,[y\mathrm{erfc}(\pm y) \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}] \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(\mp x)\,[y(y\mathrm{erfc}(\pm y) \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2}) + \mathrm{erfc}(\pm y) \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}}y\mathrm{e}^{-y^2} \\
&\qquad \pm \frac{4}{\sqrt{\pi}}y\mathrm{e}^{-y^2}] \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{erfc}(\mp x)\,[y^2\mathrm{erfc}(\pm y) + \mathrm{erfc}(\pm y)]\,.
\end{aligned}$$

Dus, voor $x \neq y$:

$$G_{yy}(x,y) = (1+y^2)G(x,y)\,. \tag{B.8}$$

Verder geldt

$$\begin{aligned}
&G_y(x,x-) - G_y(x,x+) = \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}x\,[y\mathrm{erfc}(-x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}] - \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{erfc}(-x)\,[y\mathrm{erfc}x - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}] \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{erfc}x\,+\,\mathrm{erfc}(-x)) \\
&= 1\,.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Substitutie van (B.8) en (B.9) in (B.7) geeft nu

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)\partial^2 u(y)\mathrm{d}y &= -u(x) + (\int_{-\infty}^{x-} + \int_{x+}^{\infty})G(x,y)(1+y^2)u(y)\mathrm{d}y \\
&= -u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)(1+y^2)u(y)\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Substitutie in (B.6) geeft tenslotte

$$\mathcal{T}\mathcal{Q}u = u\,.$$

□

Lemma B.4 *Voor alle $f \in L_2(\mathbb{R})$ geldt*

$$\rceil_{x\in\mathbb{R}} x^2(\mathcal{T}f)(x) \in L_2(\mathbb{R}) \ .$$

Bewijs Zij $f \in L_2(\mathbb{R})$. Te bewijzen is

$$I_n := \int_{-n}^{n} |x^2(\mathcal{T}f)(x)|^2 \mathrm{d}x$$

convergeert voor $n \to \infty$. Er geldt, voor $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-n}^{-1} |x^2(\mathcal{T}f)(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} |x^2(\mathcal{T}f)(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{1}^{n} |x^2(\mathcal{T}f)(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &= (\int_{-n}^{-1} + \int_{1}^{n})|x^2(\mathcal{T}f)(x)|^2 \mathrm{d}x + O(1) \\ &= O(1)(\int_{-n}^{-1} + \int_{1}^{n})x^4 |\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)|f(y)|\mathrm{d}y|^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{B.10}$$

We schatten $|\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)\,|f(y)|\,\mathrm{d}y|^2$. Er geldt, met Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} &|\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)\,|f(y)|\,\mathrm{d}y|^2 = \\ &= |\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)\sqrt{G(x,y)}\frac{1}{1+|y|}\sqrt{G(x,y)}\,|f(y)|\,\mathrm{d}y|^2 \\ &\leq |\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)^2 G(x,y)\mathrm{d}y| \cdot |\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|y|)^2} G(x,y)|f(y)|^2 \mathrm{d}y| \end{aligned} \tag{B.11}$$

Nu geldt, voor $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\int_{-\infty}^{\infty} (1+|y|)^2 G(x,y)\mathrm{d}y| &\leq (|\int_{-\infty}^{-1}| + |\int_{-1}^{1}| + |\int_{1}^{\infty}|)(1+|y|)^2 G(x,y)\mathrm{d}y \\ &= O(1)(|\int_{-\infty}^{-1}| + |\int_{1}^{\infty}|)(1+|y|)^2 G(x,y)\mathrm{d}y \\ &= O(1)(\int_{-\infty}^{-1} y^2 G(x,y)\mathrm{d}y + \int_{1}^{\infty} y^2 G(x,y)\mathrm{d}y) \ . \end{aligned} \tag{B.12}$$

Met lemma B.2 vinden we nu, voor $x > 1$

$$\begin{aligned} \int_{1}^{\infty} y^2 G(x,y)\mathrm{d}y &= (\int_{1}^{x} + \int_{x}^{\infty}) y^2 G(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{1}^{x} y^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \int_{x}^{\infty} y\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{1}^{x} (1+y^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\right]_{x}^{\infty} \\ &= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \left[y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\right]_{1}^{x} + O(1) \\ &= O(1) \ . \end{aligned} \tag{B.13}$$

Dit betekent

$$\int_{1}^{\infty} y^2 G(x,y)\mathrm{d}y$$

is begrensd voor $x > 1$. Verder, voor $x < -1$

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty y^2 G(x,y)\mathrm{d}y &= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^\infty y^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
&= O(1)\ . \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}
$$

Dus ook

$$
\int_1^\infty y^2 G(x,y)\mathrm{d}y
$$

is begrensd voor $x < -1$. Met de symmetrie van $G(x,y)$ volgt

$$
\int_{-\infty}^{-1} y^2 G(x,y)\mathrm{d}y
$$

is begrensd voor $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$. Met (B.12) vinden we, voor $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$,

$$
|\int_{-\infty}^\infty (1+|y|)^2 G(x,y)\mathrm{d}y| = O(1)\ . \qquad \text{(B.15)}
$$

We schatten nu $|\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+|y|)^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y|$. Analoog aan (B.12) kunnen we weer schrijven

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+|y|)^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y| = \\
&\quad O(1)(\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{y^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y + \int_1^\infty \frac{1}{y^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y)\ . \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}
$$

Voor $x > 1$ geldt nu, analoog aan (B.13)

$$
\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{1}{y^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y = \\
&= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^x \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_x^\infty \frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y\ .
\end{aligned}
$$

Voor $x < -1$, analoog aan (B.14)

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{y^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y &= \frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y \\
&= O(1)\ . \qquad \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

Verder, voor $x > 1$, met (B.17)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{y^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y &= \int_1^\infty \frac{1}{y^2}G(x,-y)|f(y)|^2\mathrm{d}y \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{y^2}G(-x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

en voor $x < -1$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{y^2}G(x,y)|f(y)|^2\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^{-x}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_{-x}^\infty \frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Dit alles geeft, met (B.16), voor $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|y|)^2} G(x,y)|f(y)|^2 \mathrm{d}y| = \\
&= \quad \pm\frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^{\pm x}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_{\pm x}^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

En dus, met (B.11), (B.15) en (B.18), voor $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&|\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)|f(y)|\mathrm{d}y|^2 = \\
&= \quad \pm\frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^{\pm x}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_{\pm x}^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Uiteindelijk vinden we, met (B.10), voor $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
I_n \quad = \quad & \int_{-n}^{-1} x^4[-\frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^{-x}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y \\
& \quad + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_{-x}^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \\
& \quad + \int_1^n x^4[\frac{O(1)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^{x}\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y \\
& \quad + O(1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_{x}^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y]\mathrm{d}x \\
= \quad & O(1)\int_1^n x^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^x\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
& \quad + O(1)\int_1^n x^4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\int_x^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
= \quad & O(1)\int_1^n \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\int_y^n x^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& \quad + O(1)\int_1^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\int_1^{\min(y,n)} x^4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= \quad & O(1)\int_1^n \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\int_y^{\infty} x^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& \quad + O(1)\int_1^{\infty}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2\int_1^{y} x^4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

Nu geldt, voor $y > 1$

$$
\begin{aligned}
\int_y^{\infty} x^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \quad &= \quad O(1)\int_y^{\infty}(x^3-2x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \quad O(1)\left[x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_y^{\infty} \\
&= \quad O(1)y^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}
\end{aligned}
$$

terwijl

$$
\begin{aligned}
\int_1^y x^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x &= O(1)\int_1^y (3x^2+x^4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= O(1)\left[x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\right]_1^y \\
&= O(1)y^3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}+O(1) \\
&= O(1)y^3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}
\end{aligned}
$$

Dit geeft met (B.19), omdat $f \in L_2(\mathbb{R})$, voor $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
I_n &= O(1)\int_1^n \frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2 y^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y + O(1)\int_1^\infty \frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}|f(y)|^2 y^3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \\
&= O(1)\int_1^\infty |f(y)|^2\mathrm{d}y \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

Verder: I_n is monotoon niet-dalend, dus $\lim_{n\to\infty} I_n$ bestaat. □

Lemma B.5 *Er geldt*

$$R(\mathcal{T}) = W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$$

en, voor alle $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{Q}\mathcal{T}f = f\ .$$

Bewijs Zij $u \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R}) = D(\mathcal{Q})$. Schrijf $f = \mathcal{Q}u$. Dan, volgens stelling B.3, $\mathcal{T}f = \mathcal{T}\mathcal{Q}u = u$. Dus $u \in R(\mathcal{T})$. Blijkbaar $R(\mathcal{T}) \supset W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$.

Zij nu $u \in R(\mathcal{T})$. Dan, voor zekere $f \in L_2(\mathbb{R})$, zeg f, $\mathcal{T}f = u$. Volgens lemma B.4 geldt dan $\breve{\rceil}_{x\in\mathbb{R}} x^2(\mathcal{T}f)(x) \in L_2(\mathbb{R})$, dus $u \in \mathcal{F}W_2^2(\mathbb{R})$. We zullen nu bewijzen: ook $\partial^2 u \in L_2(\mathbb{R})$. Er geldt:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_{-\infty}^\infty G(x,y)f(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}[\mathrm{erfc}(-x)\int_x^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}y f(y)\mathrm{d}y \ + \ \mathrm{erfc}x\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}(-y)f(y)\mathrm{d}y]\ .
\end{aligned}
$$

Blijkbaar is u absoluut continu. Schrijf nu

$$v(x) = \mathrm{erfc}(-x)\int_x^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}y f(y)\mathrm{d}y \ + \ \mathrm{erfc}x\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}(-y)f(y)\mathrm{d}y\ .$$

Ook v is absoluut continu. We kunnen schrijven

$$\partial u(x) = xu(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\partial v(x)\ . \tag{B.20}$$

Er geldt

$$
\begin{aligned}
\partial v(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\int_x^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}y f(y)\mathrm{d}y \ - \ \mathrm{erfc}(-x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{erfc}x f(x) \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}(-y)f(y)\mathrm{d}y \ + \ \mathrm{erfc}x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{erfc}(-x)f(x) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}[\int_x^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}y f(y)\mathrm{d}y \ - \ \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\mathrm{erfc}(-y)f(y)\mathrm{d}y]\ .
\end{aligned}
$$

Dus ∂v is absoluut continu, en, met (B.20), ook ∂u is absoluut continu. Met (B.20) volgt

$$\begin{aligned}
\partial^2 u(x) &= u(x) + x^2 u(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \partial v(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \partial^2 v(x) \\
&= (1 + x^2) u(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} (2x \partial v(x) + \partial^2 v(x)) \, .
\end{aligned}$$

We berekenen $\partial^2 v$.

$$\begin{aligned}
\partial^2 v(x) &= -2x \partial v(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} [-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{erfc} x f(x) - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \mathrm{erfc}(-x) f(x)] \\
&= -2x \partial v(x) - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} f(x) \, .
\end{aligned}$$

Substitutie geeft voor $\partial^2 u$

$$\partial^2 u(x) = (1 + x^2) u(x) - f(x) \, .$$

Nu geldt $u \in L_2(\mathbb{R})$, $\breve{\rceil}_{x \in \mathbb{R}} x^2 u(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, dus $\partial^2 u \in L_2(\mathbb{R})$. Dat wil zeggen $u \in W_2^2(\mathbb{R})$.

We concluderen $u \in W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F} W_2^2(\mathbb{R})$ en $\mathcal{QT} f = \mathcal{Q} u = f$ □

Stelling B.4 *De operator $\mathcal{Q}$ is inverteerbaar en*

$$\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{T} \, .$$

Bewijs Zij $u \in D(\mathcal{Q})$ met $\mathcal{Q}u = 0$. Volgens lemma B.5 geldt dan $u \in R(\mathcal{T})$. Dus voor zekere $f \in L_2(\mathbb{R})$, zeg $f : \mathcal{T} f = u$. Met lemma B.5 volgt $f = \mathcal{QT} f = \mathcal{Q} u = 0$, en dus $u = \mathcal{T} f = \mathcal{T} 0 = 0$.

We construeren $\mathcal{Q}^{-1}$. Met lemma B.5 geldt:

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{Q}^{-1}) &= R(\mathcal{Q}) \\
&= \{\mathcal{Q} u | u \in R(\mathcal{T})\} \\
&= \{\mathcal{QT} f | f \in L_2(\mathbb{R})\} \\
&= \{f | f \in L_2(\mathbb{R})\} \\
&= L_2(\mathbb{R}) \\
&= D(\mathcal{T}) \, .
\end{aligned}$$

Zij nu $f \in D(\mathcal{Q}^{-1})$, en u zodanig dat $\mathcal{Q} u = f$. We zoeken een operator $\mathcal{Q}^{-1}$ met $\mathcal{Q}^{-1} f = u$. Er geldt

$$\begin{aligned}
f &= \mathcal{QT} f \\
\mathcal{Q} u &= \mathcal{QT} f \\
\mathcal{Q}(u - \mathcal{T} f) &= 0 \\
u &= \mathcal{T} f
\end{aligned}$$

We hebben gevonden

$$\forall f \in D(\mathcal{Q}^{-1}) = D(\mathcal{T}) \quad : \quad \mathcal{Q}^{-1} f = \mathcal{T} f$$

i.e. $\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{T}$. □

B.4 De operator $\mathcal{Q}$ is positief

Stelling B.5 *De operator $\mathcal{Q}$ is zelfgeadjungeerd en*

$$\mathcal{Q} > 0 \, .$$

Bewijs Er geldt, volgens [W, Theorem 6.11, p. 139], voor alle $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}^* f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(y,x)} f(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(y,x) f(y) \mathrm{d}y \\ &= (\mathcal{T} f)(x)\end{aligned}$$

bijna overal. Dus $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. Verder, omdat $R(\mathcal{T}) = W_2^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F} W_2^2(\mathbb{R})$, $R(\mathcal{T})$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$. Volgens [W, Theorem 4.17, p. 71] geldt dan $\mathcal{T}^{-1\,*} = \mathcal{T}^{*\,-1}$. We vinden

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{T}^{-1\,*} = \mathcal{T}^{*\,-1} = \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{Q}$$

i.e. $\mathcal{Q}$ is zelfgeadjungeerd.

Zij nu $u \in D(\mathcal{Q})$. We zullen bewijzen: $(\mathcal{Q}u, u) \geq 0$ en, als $(\mathcal{Q}u, u) = 0$, dan $u = 0$. Beschouw $(\mathcal{Q}u, u)$.

Er geldt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}u, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} [(x^2+1)u(x) - \partial^2 u(x)] \overline{u(x)} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2+1)|u(x)|^2 \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \partial^2 u(x) \overline{u(x)} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2+1)|u(x)|^2 \mathrm{d}x - \Big[\partial u(x) \overline{u(x)}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial u(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2+1)|u(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial u(x)|^2 \mathrm{d}x \,,\end{aligned}$$

immers, $u \in W_2^2(\mathbb{R})$, dus $u(x) \to 0$ en $\partial u(x) \to 0$ als $|x| \to \infty$. We vinden $(\mathcal{Q}u, u) \geq 0$ en, als $(\mathcal{Q}u, u) = 0$, dan $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$. I.e. $\mathcal{Q} > 0$. $\square$

Bijlage C

De existentie-stelling

Zij H een Hilbertruimte met norm $\|\cdot\|_H = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$

C.1 Infinitesimaal-generatoren en hulp-operatoren

Definitie C.1 We noemen een operator $\mathcal{Q}$ in een H *strict positief* als $\mathcal{Q}$ zelf geadjungeerd is, en, voor alle $u \in D(\mathcal{Q})$, $u \neq 0$, geldt $(u, \mathcal{Q}u) > 0$. We schrijven dan $\mathcal{Q} > 0$. □

We definiëren, c.f. [G2, (2.1), § 2, p. III.3] en [G1, Remark, § 4, p. 134]:

Definitie C.2 We noemen een operator $\mathcal{A}$ in H een *pre-infinitesimaal-generator met hulp-operator* $\mathcal{Q}$ als $\mathcal{Q}$ een dicht gedefinieerde, strict positieve, inverteerbare operator in H is, met $D(\mathcal{Q}^{-1}) = H$, en als verder is voldaan aan:

1. $D(\mathcal{A}) \supset D(\mathcal{Q})$ en $D(\mathcal{A}^*)$ is dicht in H, dus $\mathcal{A}$ is afsluitbaar
2. $\exists_{\beta \geq 0} \forall_{u \in \mathsf{D}(\mathcal{A})} \operatorname{Re}(u, \mathcal{A}u) \leq \beta(u,u)$
3. $\exists_{\beta \geq 0} \forall_{u \in \mathsf{D}(\mathcal{Q})} \operatorname{Re}(\mathcal{Q}u, \mathcal{A}u) \leq \beta(\mathcal{Q}u, u)$.

De afsluiting van $\mathcal{A}$, $\bar{\mathcal{A}}$, heet een *infinitesimaal-generator*. □

Volgens [G2, stelling 1, p.III.3] geldt nu: als $\mathcal{A}$ een pre-infinitesimaal-generator met hulp-operator $\mathcal{Q}$ is, dan $\mathcal{A}\mathcal{Q}^{-1} \in B(L_2(\mathbb{R}))$, dus bovenstaande definitie van infinitesimaal-generatoren komt overeen met die in [G1, Definition, § 2, p. 126].

C.2 Existentie en éénduidigheid

Zij nu de operator $\mathcal{A}$ in H een infinitesimaal-generator met hulp-operator $\mathcal{Q}$. We schrijven H_T voor de vectorruimte van alle meetbare afbeeldingen $u(t) : [0,T] \to H$ waarvoor $\|u(t)\|$ kwadratisch integreerbaar is.

We definiëren, c.f. [G1, pp. 127, 128], de operator Ω op $D(\Omega)$:

Definitie C.3 We definiëren de verzameling $D(\Omega)$ als de verzameling absoluut continue functies $u(t) \in H_T$ die voldoen aan:

- voor alle $t \in [0,T] : u(t) \in D(\mathcal{Q})$,
- voor bijna alle $t \in [0,T] : \partial u(t) \in D(\mathcal{Q})$,
- $\mathcal{Q}u(t) \in H_T$ en
- $\mathcal{Q}\partial u(t) \in H_T$,

waarbij $\partial u(t)$ staat voor de gegeneraliseerde afgeleide van u naar t. □

Definitie C.4 We definiëren de operatoren $\mathcal{S}$ en Ω op $D(\Omega)$ door

$$\begin{aligned} \mathcal{S}u &= \partial u - \mathcal{A}u \\ \Omega u &= [\mathcal{S}u; \phi] \,. \end{aligned}$$

Er geldt: $R(\Omega) \subset H_T \times H$. □

De existentie-stelling [G1, p. 130, Theorem 5] zegt nu:

Stelling C.1 *Voor alle $T \in [0, \infty]$ geldt: De operator Ω is afsluitbaar. We geven de afsluiting van Ω aan met $\overline{\Omega}$. Zij nu $\phi \in H$. Dan heeft de vergelijking $\overline{\Omega}u = [0, \phi]$ precies één oplossing $u(t) : [0, \infty) \to H$. Deze oplossing zal, in $\|\cdot\|_H$-zin, continu van t afhangen.*

De operator $\mathcal{S}$ heeft een gesloten uitbreiding $\overline{\mathcal{S}}$; $D(\overline{\mathcal{S}}) \supset D(\overline{\Omega})$ en $R(\overline{\mathcal{S}}) = H_T$. Er geldt $\overline{\mathcal{S}}u = 0$ en $\lim_{t \to 0} u(t) = \phi$ in H-zin.

We schrijven $u(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$. □

Stelling [G1, Theorem 6, § 3, p. 132] zegt:

Stelling C.2 *Als $u(t)$ een klassieke oplossing is van*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u &= \mathcal{A}u : \\ u(0) &= \phi \end{aligned}$$

dan is $u(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$. □

De stelling [G1, Theorem 11, § 5, p. 136] zegt nu

Stelling C.3 *Er geldt voor iedere $t \geq 0$:*

1. *De* propagator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ *is een begrensde operator op H;*
2. *Voor iedere $\phi \in H$ is $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi$ een in $\|\cdot\|_H$-zin continue functie van t;*
3. *Als $\phi \in D(\mathcal{A}^n)$, dan $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi \in D(\mathcal{A}^n)$ en $\mathcal{A}^n \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\phi = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}\mathcal{A}^n\phi$.*

□

Met de stelling [G1, Theorem 10 (Persistence of initial- and source conditions), p. 134] volgt:

Stelling C.4 *Zij $\phi \in D(\mathcal{A})$. Dan geldt voor de gegeneraliseerde oplossing $u(t)$ van de evolutievergelijking: $u(t) \in D(\mathcal{A})$ voor alle $t \in [0, T]$, en $u(t)$ is continu differentieerbaar.* □

Eenvoudig volgt:

Lemma C.1 *Als $\mathcal{A}$ èn $-\mathcal{A}$ infinitesimaal-generatoren zijn, dan gelden alle bovenstaande stellingen óók voor $t \in (-\infty, 0]$; dus voor $t \in \mathbb{R}$.* □

Bijlage D

De Schwartz-ruimte der snel afnemende functies en haar duale

Meer theorie over de Schwartz-ruimte en haar duale is te vinden in [G&S, p. 26], [W, § 10.1, p. 289] en [R&S 1, V.3, p. 133 e.v.]. Hier de voor dit verslag belangrijkste resultaten.

D.1 De Schwartz-ruimte der snel afnemende functies $S(\mathbb{R})$

Definitie D.1 We definiëren, c.f. [R&S 1, p. 133] de *Schwartz-ruimte van snel afnemende functies* $S(\mathbb{R})$ als de ruimte van functies $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ waarvoor geldt

$$\|f\|_{n,k} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^n |\tfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x)| < \infty \,.$$

voor alle $n, k \in \mathbb{N}$. □

We voeren op $S(\mathbb{R})$ het volgende convergentie-begrip in: Voor alle rijtjes $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})$, betekent $f_j \to 0\,(j \to \infty)$ dat voor alle $n, k \in \mathbb{N}$ geldt $\|f\|_{n,k} \to 0$. We noemen een operator $\mathcal{A}$ in $S(\mathbb{R})$ dus *continu in* $S(\mathbb{R})$ als $\mathcal{A}$ continu is ten aanzien van iedere norm $\|\cdot\|_{n,k}$ uit de aftelbare set normen op $S(\mathbb{R})$. Het theorema [R&S 1, Theorem V.9, p. 133] zegt nu

Stelling D.1 *De ruimte $S(\mathbb{R})$ met de topologie gegenereerd door de aftelbare verzameling seminormen $\|\cdot\|_{n,k}$ is een volledige, metriseerbare, lokaal convexe vectorruimte, i.e. een* Fréchet-ruimte. □

Definitie D.2 We definiëren de vectorruimte s door

$$s := \{\underline{u} \in \mathbb{C}^\infty \mid \forall_{p\in\mathbb{Z}}((j+1)^p u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_2\} \,.$$

□

We kunnen nu, met het 'N-representatie theorema voor $S(\mathbb{R})$' (zie [R&S 1, Theorem V.13, p. 143]), de Schwartz-ruimte representeren door deze deelruimte s van de rijtjes-ruimte $\mathbb{C}^\infty$:

Lemma D.1 *We voorzien s van een topologie met de normen*

$$\|\underline{u}\|^2_{s,n} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{2n} |u_j|^2 \,,$$

met $n \in \mathbb{N}$. Zij $u \in S(\mathbb{R})$. Schrijf $u_j = (u, \psi_j)$. Dan $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in s$, en de afbeelding $u \to (u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is een topologisch isomorfisme. De Hermite-ontwikkeling

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \psi_j$$

is convergent in $S(\mathbb{R})$. □

D.2 De ruimte der getemperde distributies $S'(\mathbb{R})$

Definitie D.3 We schrijven $S'(\mathbb{R})$ voor de topologisch duale ruimte van $S(\mathbb{R})$. We noemen $S'(\mathbb{R})$ de ruimte der *getemperde distributies.* □

We definiëren c.f. [G&S, § I.1.10, p. 28]:

Definitie D.4 We noemen een rij $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $S'(\mathbb{R})$*-zin (zwak) convergent* naar 0 als voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ geldt

$$(u_j, \phi) \to 0\,.$$

□

Met [R&S 1, § IV.5, p. 113] volgt nu:

Lemma D.2 *De ruimte* $S'(\mathbb{R})$ *bestaat uit lineaire, in* $S'(\mathbb{R})$*-zin continue functionalen op* $S(\mathbb{R})$*.* □

Definitie D.5 We definiëren de vectorruimte s' door

$$s' := \{\underline{u} \in \mathbb{C}^\infty \,|\, \exists_{p\in\mathbb{N}}\, ((j+1)^{-p}u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_2\}$$

□

Lemma D.3 *Zij* $u \in S'(\mathbb{R})$*, en schrijf, voor alle* $j \in \mathbb{N}$*,* $u_j = (u, \psi_j)$*. Dan* $\underline{u} \in s'$*.*

Anderzijds, als $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in s'$*, dan is er een unieke* $u \in S(\mathbb{R})$ *zodanig dat voor alle* $j \in \mathbb{N}$ $(u, \psi_j) = u_j$*. De uitdrukking*

$$\sum_{j=0}^{\infty}(u, \psi_j)\psi_j$$

convergeert zwak in $S'(\mathbb{R})$*-zin naar* u*.*

Bewijs Dit lemma is een herformulering van het 'N-representatie theorema voor $S'(\mathbb{R})$', [R&S 1, Theorem V.14, p. 143]. Immers, voor alle $\underline{u} \in \mathbb{C}^\infty$ geldt: Er is er een $p \in \mathbb{N}$ zodat $((j+1)^{-p}u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l_2$, dan en slechts dan als er een $q \in \mathbb{N}$ is zodat $(j+1)^{-q}u_j$ begrensd is voor $j \in \mathbb{N}$. □

D.3 Operatoren op $S(\mathbb{R})$

We zullen de operatoren $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$ en $\mathcal{X}$ soms opvatten als operatoren op $S(\mathbb{R})$. We definiëren, voor alle $f \in S(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f)(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixy} f(y)\mathrm{d}y\,,\\
(\mathcal{P}f)(x) &:= f(-x)\,,\\
(\mathcal{D}f)(x) &:= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\,,\\
(\mathcal{X}f)(x) &:= x f(x)\,,\\
(\mathcal{T}_a f)(x) &:= f(x-a)\,,\\
(\mathcal{E}_a f)(x) &:= \mathrm{e}^{-iax} f(x)\,,\\
(\mathcal{S}_a f)(x) &:= f(ax) \qquad (a \neq 0)\,,
\end{aligned}$$

met $a \in \mathbb{R}$. De operator $\mathcal{F}$ is een operator op $S(\mathbb{R})$. (Zie [W, Theorem 10.3, p. 291].) Dat ook de overige operatoren operatoren op $S(\mathbb{R})$ zijn is eenvoudig in te zien.

Lemma D.4 *Er geldt*

$$\mathcal{T}_a\mathcal{E}_b = \mathrm{e}^{iab}\mathcal{E}_b\mathcal{T}_a$$

Bewijs Voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ geldt

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_a\mathcal{E}_b\phi(x) &= \mathrm{e}^{-ib(x-a)}\phi(x-a)\\ &= \mathrm{e}^{iab}\mathrm{e}^{-ibx}\phi(x-a)\\ &= \mathrm{e}^{iab}\mathcal{E}_b\mathcal{T}_a\phi(x)\end{aligned}$$

□

D.4 Operatoren op $S'(\mathbb{R})$

We vatten $S(\mathbb{R})$ op als een deelruimte van $S'(\mathbb{R})$. We kunnen de operatoren $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{D}$ en $\mathcal{X}$ nu uitbreiden tot operatoren op $S'(\mathbb{R})$. We doen dit als volgt, c.f. [G&S, Kapitel I, §§ 1.5, 1.6, 1.9, 2.1 pp. 19, 20, 26, 29]: We definiëren voor alle $f \in S'(\mathbb{R})$ en voor alle $g \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}f, g\rangle &:= \langle f, \mathcal{F}^{-1}g\rangle\,,\\ \langle\mathcal{P}f, g\rangle &:= \langle f, \mathcal{P}g\rangle\,,\\ \langle\mathcal{D}f, g\rangle &:= \langle f, -\mathcal{D}g\rangle\,,\\ \langle\mathcal{X}f, g\rangle &:= \langle f, \mathcal{X}g\rangle\,,\\ \langle\mathcal{T}_a f, g\rangle &:= \langle f, \mathcal{T}_{-a}g\rangle\,,\\ \langle\mathcal{E}_a f, g\rangle &:= \langle f, \mathcal{E}_{-a}g\rangle\,,\\ \langle\mathcal{S}_a f, g\rangle &:= \tfrac{1}{a}\langle f, \mathcal{S}_{\frac{1}{a}}g\rangle\,,\end{aligned}$$

waar $\langle f, g\rangle$ staat voor de evaluatie van de functionaal f in g; als f regulier is, dan

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\,.$$

D.4.1 Commutatie-eigenschappen van operatoren op $S'(\mathbb{R})$

Op dezelfde manier als in lemma D.4 vallen voor ieder paar van onze operatoren op $S(\mathbb{R})$ commutatie-eigenschappen af te leiden. Met dualiteit is eenvoudig te bewijzen dat ook de operatoren op $S'(\mathbb{R})$ deze commutatie-eigenschappen hebben. We vinden zo: De operatoren $\mathcal{T}_a$, $\mathcal{S}_a$ en $\mathcal{E}_a$ zijn inverteerbaar; en

$$\mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{T}_{-a} \tag{D.1}$$
$$\mathcal{S}_a^{-1} = \mathcal{S}_{\frac{1}{a}} \tag{D.2}$$
$$\mathcal{E}_a^{-1} = \mathcal{E}_{-a} \tag{D.3}$$
$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{I} \tag{D.4}$$
$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{P} \tag{D.5}$$
$$\mathcal{P}\mathcal{D} = -\mathcal{D}\mathcal{P} \tag{D.6}$$
$$\mathcal{X}\mathcal{F} = i\mathcal{F}\mathcal{D} \tag{D.7}$$
$$\mathcal{D}\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{D} = \mathcal{I} \tag{D.8}$$
$$\mathcal{E}_a\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{T}_{-a} \tag{D.9}$$
$$\mathcal{T}_a\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{T}_a \tag{D.10}$$
$$\mathcal{T}_a\mathcal{X} = (\mathcal{X} - a\mathcal{I})\mathcal{T}_a \tag{D.11}$$
$$\mathcal{S}_a\mathcal{F} = \tfrac{1}{a}\mathcal{F}\mathcal{S}_{\frac{1}{a}} \tag{D.12}$$
$$\mathcal{S}_a\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_{ab}\mathcal{S}_a \tag{D.13}$$
$$\mathcal{S}_a\mathcal{D} = \tfrac{1}{a}\mathcal{D}\mathcal{S}_a \tag{D.14}$$

De geldigheid van vergelijking D.7 is als volgt aan te tonen: Voor alle $u \in S'(\mathbb{R})$ en $\phi \in S(\mathbb{R})$ geldt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{X}\mathcal{F}u, \phi\rangle &= \langle \mathcal{F}u, \mathcal{X}\phi\rangle \\
&= \langle u, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{X}\phi\rangle \\
&= -i\langle u, \mathcal{D}\mathcal{F}^{-1}\phi\rangle \\
&= i\langle \mathcal{D}u, \mathcal{F}^{-1}\phi\rangle \\
&= i\langle \mathcal{F}\mathcal{D}u, \phi\rangle\,.
\end{aligned}$$

De geldigheid van de overige vergelijkingen is op dezelfde manier aan te tonen.

Lemma D.5 *Er geldt: $\mathcal{F}$ is inverteerbaar en*

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{P}\,. \tag{D.15}$$

Bewijs Bedenk dat $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}$ voldoen aan de vergelijkingen D.4 en D.5. Zij nu $f \in S'(\mathbb{R})$ zodanig dat $\mathcal{F}f = 0$. Dan geldt, met $\mathcal{F}^2 = \mathcal{P}$, $0 = \mathcal{F}0 = \mathcal{F}^2 f = \mathcal{P}f$. Dus $f = 0$, want, omdat $\mathcal{P}^2 = \mathcal{I}$ is $\mathcal{P}$ inverteerbaar. Er volgt: $\mathcal{F}$ is inverteerbaar, en $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{P}$. □

We bewijzen nog de volgende commutatie-eigenschappen.

Lemma D.6 *Er geldt*

$$\mathcal{X}\mathcal{P} = -\mathcal{P}\mathcal{X} \tag{D.16}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = i\mathcal{F}\mathcal{X} \tag{D.17}$$

Bewijs Er geldt, met de vergelijkingen D.4, D.5, D.6 en D.7 en lemma D.5 dat

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}\mathcal{P} &= \mathcal{X}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{P} = i\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{P} = i\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F} \\
&= i\mathcal{F}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{F} = -i\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{F} = -i\mathcal{P}\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{P}\mathcal{F} \\
&= -\mathcal{P}\mathcal{X}\mathcal{F}\mathcal{P}\mathcal{F} = -\mathcal{P}\mathcal{X}\,.
\end{aligned}$$

Hiermee vinden we voor $\mathcal{D}\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\mathcal{F} &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F} = -i\mathcal{F}^{-1}\mathcal{X}\mathcal{F}^2 \\
&= -i\mathcal{F}^{-1}\mathcal{X}\mathcal{P} = i\mathcal{F}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{X} = i\mathcal{F}\mathcal{X}\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma D.7 *Er geldt*

$$\mathcal{E}_a\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{E}_a\,. \tag{D.18}$$

Bewijs Bedenk dat voor $\mathcal{X}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}_a$ en $\mathcal{T}_a$ de vergelijkingen D.7, D.9 en D.10 gelden. Er geldt dus

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_a\mathcal{X} &= \mathcal{E}_a\mathcal{X}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = i\mathcal{E}_a\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1} = i\mathcal{F}\mathcal{T}_{-a}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1} \\
&= i\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{T}_{-a}\mathcal{F}^{-1} = i\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{E}_a = \mathcal{X}\mathcal{E}_a\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma D.8 *Er geldt*

$$\mathcal{E}_a\mathcal{D} = (\mathcal{D} + ia\mathcal{I})\mathcal{E}_a \tag{D.19}$$

$$\mathcal{S}_a\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{S}_a \tag{D.20}$$

$$\mathcal{S}_a\mathcal{X} = a\mathcal{X}\mathcal{S}_a \tag{D.21}$$

$$\mathcal{S}_a\mathcal{T}_b = \mathcal{T}_{b/a}\mathcal{S}_a\,. \tag{D.22}$$

Bewijs De vergelijking D.19 volgt met eenvoudige algebra uit D.9 en D.11. De vergelijkingen D.20 en D.21 volgen uit D.5 en D.12 respectievelijk D.4, D.5, D.7 en D.14. De vergelijking D.22 volgt uit D.9, D.12 en D.13. □

D.4.2 Continuïteit van operatoren op $S'(\mathbb{R})$

Het theorema [R&S 2, Theorem IX.2, p. 5] zegt:

Lemma D.9 *De operator $\mathcal{F}$ is zwak continu op $S'(\mathbb{R})$.* □

Lemma D.10 *De operatoren $\mathcal{X}$ en $\mathcal{D}$ zijn zwak continu op $S'(\mathbb{R})$.*
Bewijs Zij $f_n \to f$ in $S'(\mathbb{R})$. I.e.: voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ geldt $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$. Zij nu $\phi \in S(\mathbb{R})$. Dan ook $\mathcal{D}\phi \in S(\mathbb{R})$, en dus

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D} f_n, \phi\rangle &= -\langle f_n, \mathcal{D}\phi\rangle \\ &\to -\langle f, \mathcal{D}\phi\rangle \\ &= \langle \mathcal{D} f, \phi\rangle \,.\end{aligned}$$

We concluderen: $\mathcal{D}$ is zwak continu.

Met lemma D.9, en de commutatie eigenschap D.7, vinden we nu dat ook de operator $\mathcal{X}$ zwak continu is op $S'(\mathbb{R})$. □

Lemma D.11 *De operatoren $\mathcal{T}_a$ en $\mathcal{E}_a$ zijn zwak continu op $S'(\mathbb{R})$.*
Bewijs Zij $f_n \to f$ in $S'(\mathbb{R})$. I.e.: voor alle $\phi \in S(\mathbb{R})$ geldt $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$. Zij nu $\phi \in S(\mathbb{R})$. Dan ook $\mathcal{T}_{-a}\phi \in S(\mathbb{R})$, en dus

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}_a f_n, \phi\rangle &= \langle f_n, \mathcal{T}_{-a}\phi\rangle \\ &\to \langle f, \mathcal{T}_{-a}\phi\rangle \\ &= \langle \mathcal{T}_{-a} f, \phi\rangle \,.\end{aligned}$$

We concluderen: $\mathcal{T}_{-a}$ is zwak continu.

Met lemma D.9, en de commutatie eigenschap D.9, vinden we dat ook de operator $\mathcal{E}_a$ zwak continu is op $S'(\mathbb{R})$. □

Bijlage E

Het eigenwaarde-probleem voor de operator $\mathcal{A}$ in GF

Inleiding

We beschouwen, voor $u \in \mathbf{GF} \setminus \{0\}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$, het eigenwaarde-probleem

$$\mathcal{A}u = \lambda u \tag{E.1}$$

E.1 Een herformulering van het eigenwaarde-probleem in $\mathbf{GF}_+$ in algebraïsche termen

Lemma E.1 *Een $u \in \mathbf{GF}_+$ is eigenfunctie bij eigenwaarde λ dan en slechts dan als geldt:*

$$u = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j \eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} ,$$

met $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2 \quad = \quad 0 , \tag{E.2}$$

$$-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1} \quad = \quad 0 , \tag{E.3}$$

en

$$\lambda \quad = \quad n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu , \tag{E.4}$$

terwijl, voor $n \geq 2$,

$$0 \quad = \quad (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2\alpha_{2,0}\mu - \lambda)\upsilon_0 + (-2i\alpha_{2,0}\beta + \alpha_{1,0})\upsilon_1 + 2\alpha_{2,0}\upsilon_2 , \tag{E.5}$$

voor $n \geq 3$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (\alpha_{0,0} + \alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2 - \lambda)\upsilon_1 \\ & + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)\upsilon_2 + 6\alpha_{2,0}\upsilon_3 , \end{aligned} \tag{E.6}$$

voor $n \geq 4$, $2 \leq j \leq n-2$,

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \lambda)\upsilon_j \\ & + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)\upsilon_{j+1} \\ & + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}\upsilon_{j+2} , \end{aligned} \tag{E.7}$$

en voor $n \geq 1$*:*

$$0 = ((n-1)\alpha_{1,1} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - \lambda)v_{n-1} + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n \,. \tag{E.8}$$

Bewijs Zij $n \geq 4$. Dan vinden we voor $\mathcal{A}u$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u = \sum_{j=0}^{n} \{ & j(j-1)\alpha_{2,0}\eta_{(\mu)}^{(j-1,\beta)} + [-2ij\alpha_{2,0}\beta + j\alpha_{1,0}]\eta_{(\mu)}^{(j,\beta)} \\ & + [-2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2 + j\alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} \\ & + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta_{(\mu)}^{(j+2,\beta)} \\ & + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta_{(\mu)}^{(j+3,\beta)}]\}v_j \,;\end{aligned}$$

een som van $\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$'s. Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(1,\beta)}$ in deze uitdrukking aan die in λu geeft

$$\lambda v_0 = (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2\alpha_{2,0}\mu)v_0 + (-2i\alpha_{2,0}\beta + \alpha_{1,0})v_1 + 2\alpha_{2,0}v_2 \,. \tag{E.9}$$

Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(2,\beta)}$ geeft

$$\begin{aligned}\lambda v_1 = {} & (\alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_0 \\ & + (\alpha_{0,0} + \alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2)v_1 \\ & + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)v_2 + 6\alpha_{2,0}v_3 \,.\end{aligned} \tag{E.10}$$

Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$, $2 \leq j \leq n-2$ geeft

$$\begin{aligned}\lambda v_j = {} & (\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{j-2} + (-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1})v_{j-1} \\ & + (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu)v_j \\ & + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)v_{j+1} \\ & + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}v_{j+2} \,.\end{aligned} \tag{E.11}$$

Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n,\beta)}$ geeft

$$\begin{aligned}\lambda v_{n-1} = {} & (4\alpha_{2,0}\mu^2 + \alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu)v_{n-3} \\ & + (\alpha_{0,1} - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu)v_{n-2} \\ & + ((n-1)\alpha_{1,1} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2)v_{n-1} \\ & + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)v_n \,.\end{aligned} \tag{E.12}$$

Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n+1,\beta)}$ geeft

$$\begin{aligned}\lambda v_n = {} & (\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-2} \\ & + (-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1})v_{n-1} \\ & + (n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu)v_n \,.\end{aligned} \tag{E.13}$$

Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n+2,\beta)}$ geeft

$$0 = (\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_{n-1} + (-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1})v_n \,. \tag{E.14}$$

Gelijkstellen van de coëfficient voor $\eta_{(\mu)}^{(n+3,\beta)}$ geeft

$$0 = (\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2)v_n \,. \tag{E.15}$$

Met $v_n \neq 0$ geeft vergelijking E.15:

$$\alpha_{0,2} - 2\alpha_{1,1}\mu + 4\alpha_{2,0}\mu^2 \quad = \quad 0\,.$$

Vergelijking E.14 geeft

$$-i\alpha_{1,1}\beta + 4i\alpha_{2,0}\beta\mu - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1} \quad = \quad 0\,.$$

Vergelijking E.13 geeft voor de eigenwaarde $\lambda = \lambda(n)$:

$$\lambda \quad = \quad n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu\,.$$

De vergelijkingen E.9 tot en met E.12 zijn te herschrijven tot het stelsel van vergelijkingen E.5 tot en met E.8 van n vergelijkingen.

Vervolgens beschouwen we de gevallen waarin $n < 4$. Als $n = 0$ vinden we voor $\mathcal{A}u$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u \quad = \quad & \{[-2\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2 - i\alpha_{1,0}\beta + \alpha_{0,0}]\eta_{(\mu)}^{(1,\beta)} \\ & \quad + [4i\alpha_{2,0}\beta\mu - i\alpha_{1,1}\beta - 2\alpha_{1,0}\mu + \alpha_{0,1}]\eta_{(\mu)}^{(2,\beta)} \\ & \quad + [4\alpha_{2,0}\mu^2 - 2\alpha_{1,1}\mu + \alpha_{0,2}]\eta_{(\mu)}^{(3,\beta)}]\}v_0\,. \end{aligned}$$

Gelijkstellen aan λu geeft de vergelijkingen E.2, E.3 en E.4.

Als $n = 1$ vinden we de vergelijkingen E.2, E.3, E.4 en E.8. Als $n = 2$ vinden we de vergelijkingen E.2, E.3, E.4, E.5 en E.8. Als $n = 3$ vinden we de vergelijkingen E.2, E.3, E.4, E.5, E.6 en E.8. □

E.2 De oplossing van het algebraïsche probleem

E.2.1 De coëfficiënt μ

We berekenen μ. We vinden:

Lemma E.2 *Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0$, dan is iedere μ oplossing van vergelijking E.2. Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = 0 \neq \alpha_{0,2}$, dan heeft de vergelijking geen oplossingen. Als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, dan heeft de vergelijking de oplossing*

$$\mu \quad = \quad \tfrac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}}\,.$$

Zij nu $\alpha_{2,0} \neq 0$. Dan heeft vergelijking E.2 de oplossingen μ_+ en μ_-, met

$$\mu_+ \quad = \quad \tfrac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} + \tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}\sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}$$

en

$$\mu_- \quad = \quad \tfrac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} - \tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}\sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}\,.$$

□

E.2.2 De coëfficiënt β

We berekenen β. We vinden meteen:

Lemma E.3 *Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = \alpha_{1,0} = \alpha_{0,1} = 0$, dan is iedere β oplossing van vergelijking E.3. Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = \alpha_{1,0} = 0 \neq \alpha_{0,1}$, dan heeft de vergelijking geen oplossingen. Ook als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0 \neq \alpha_{1,0}$, en $\mu \neq \frac{\alpha_{0,1}}{2\alpha_{1,0}}$ heeft de vergelijking geen oplossingen. Als $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0 \neq \alpha_{1,0}$, en $\mu = \frac{\alpha_{0,1}}{2\alpha_{1,0}}$, dan is iedere β een oplossing van de vergelijking. Als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, dan heeft de vergelijking de oplossing*

$$\beta \quad = \quad \frac{i\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}}{\alpha_{1,1}^2} - \frac{i\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}}\,.$$

Zij nu $\alpha_{2,0} \neq 0$ *en* $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$*. Dan heeft vergelijking E.3 de oplossing*

$$\beta \;=\; \frac{2\alpha_{1,0}\mu - \alpha_{0,1}}{4i\alpha_{2,0}\mu - i\alpha_{1,1}} \,.$$

□

E.2.3 De eigenwaarde λ

We berekenen λ. We vinden

Lemma E.4 *Zij, voor zekere coëfficiënten* υ_j *de functie*

$$u = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_j \eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$$

eigenfunctie. Dan geeft vergelijking E.8 dat u *eigenfunctie is bij de eigenwaarde:*

$$\lambda \;=\; n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu \,.$$

□

E.2.4 De overige coëfficiënten υ_j van de eigenfunctie

Enige eenvoudige gevallen

We beschouwen het stelsel E.5 tot en met E.8. Met de lemmata E.2, E.3 en E.4 vinden we:

Lemma E.5 *Zij* $\alpha_{2,0} = \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0$*. Dan geldt:*

- *Als* $\alpha_{1,0} = \alpha_{0,1} = 0$*, dan is ieder paar* μ, β *oplossing van de vergelijkingen E.2 en E.3. Als verder òf* $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ *en* $\mathrm{Im}(\beta) = 0$*, òf* $\mathrm{Re}(\mu) > 0$*, dan is* $\lambda = \alpha_{0,0}$ *de enige eigenwaarde van* $\mathcal{A}$*; de eigenruimte van deze eigenwaarde is* **GF***.*
- *Als* $\alpha_{1,0} \neq 0$*, dan is* $\mu = \frac{\alpha_{0,1}}{2\alpha_{1,0}}$ *oplossing van vergelijking E.2; iedere* $\beta \in \mathbb{C}$ *is oplossing van vergelijking E.3. Schrijf* $\beta = \frac{i}{\alpha_{1,0}}(\lambda - \alpha_{0,0})$*. Dan is* λ *oplossing van E.4. Het stelsel voor* υ_j *heeft dan echter geen niet-triviale oplossing.* $\mathcal{A}$ *heeft dus geen eigenwaarden.*
- *In alle overige gevallen heeft* $\mathcal{A}$ *geen eigenwaarden.*

□

Een criterium voor oplosbaarheid van het stelsel vergelijkingen voor de coëfficiënten υ_j

We onderzoeken nu de oplosbaarheid van het stelsel E.5 tot en met E.8, met $\underline{\alpha}$ zodanig dat $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{1,1}$ en $\alpha_{0,2}$ niet alle gelijk aan nul zijn.

Lemma E.6 *Zij òf* $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$*, òf* $\alpha_{2,0} \neq 0 \neq \alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$*, en zij* μ *en* β *oplossingen van de vergelijkingen E.2 en E.3. Dan heeft het stelsel E.5 tot en met E.8 precies één niet-triviale oplossing.*
Bewijs De voorwaarde "òf $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, òf $\alpha_{2,0} \neq 0$" is nodig en voldoende voor het bestaan van een eindig ($\neq 0$) aantal oplossingen (μ, β) van de vergelijkingen E.2 en E.3. Laat $\underline{\alpha}$ aan deze voorwaarde voldoen, en laat (μ, β) zo'n oplossing zijn.

Beschouw nu het stelsel. We kunnen υ_n vrij kiezen (mits $\upsilon_n \neq 0$). We kiezen $\upsilon_n = 1$. We vinden dan een stelsel van $n+1$ vergelijkingen voor $n+1$ onbekenden, dat voor is te stellen door

$$A\overline{u} \;=\; \overline{f} \,,$$

met $\overline{u}$ de vector $(v_0, v_1, ..., v_n)^T$, $\overline{f}$ de vector $(0, 0, ..., 0, 1)^T$ en A een 3-diagonaalse bovendriehoeksmatrix, met matrix-elementen $a_{i,j}$, $0 \le i, j \le n$. Er zal gelden

$$\begin{aligned}\det(A) &= \prod_{j=0}^{n} a_{j,j} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \lambda\,.\end{aligned}$$

Nu geldt, volgens de regel van Cramer, dat het stelsel een niet-triviale oplossing heeft als $\det(A) \neq 0$; i.e. als

$$\lambda \notin \{j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu \mid 0 \le j \le n-1\}\,.$$

Wanneer we de uitdrukking voor λ uit lemma E.4 substitueren, vinden we dat deze eis equivalent is aan:

$$n(\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu) \notin \{j(\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu) \mid 0 \le j \le n-1\}\,,$$

ofwel

$$\alpha_{1,1} - 4\alpha_{2,0}\mu \neq 0\,.$$

Als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, dan is aan deze eis voldaan. Als $\alpha_{2,0} \neq 0$, dan betekent deze eis, met de expliciete uitdrukking voor μ uit lemma E.2: $\alpha_{1,1}^2 \neq 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$. □

E.3 De oplossing van het eigenwaarde-probleem in GF

Zij vanaf nu $\mathcal{A}$ niet flauw, dat wil zeggen, $\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,2}, \alpha_{0,1}$ niet alle gelijk aan nul.

E.3.1 De deelruimte $\mathbf{GF}_-$

Met de lemmata E.2 en E.3 volgt direct:

Lemma E.7 *De vergelijkingen E.2 en E.2 hebben een oplossing (μ, β) met $\mu = 0$, dan en slechts dan als $\alpha_{0,2} = 0$ en $\alpha_{1,1} \neq 0$. In dit geval is $\beta = -\frac{i\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}}$.* □

Lemma E.8 *Als $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$ een eigenfunctie $u \in \mathbf{GF}_-$ heeft, dan geldt $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$ en $\mathrm{Im}(\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}) = 0$.*
Bewijs Zij $u \in \mathbf{GF}_-$ een eigenfunctie van $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$. Dan is $U := \mathcal{F}u \in \mathbf{GF}_+$, en U is eigenfunctie van $\mathcal{A}(\underline{\hat{\alpha}}) := \mathcal{F}\mathcal{A}(\underline{\alpha})\mathcal{F}^{-1}$;

$$\hat{\alpha} = (-\alpha_{0,2},\ -\alpha_{1,1},\ -i\alpha_{0,1},\ -\alpha_{2,0},\ -i\alpha_{1,0},\ \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1})\,.$$

U is te schrijven als

$$U = \sum_{j=0}^{n} v_j \eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$$

en, omdat $\mathcal{F}^{-1}U \in \mathbf{GF}_-$, geldt dat $\mu = 0$. Vergelijking E.2 geeft dan dat $\alpha_{2,0} = 0$. Omdat vergelijking E.3 oplosbaar is, geldt $\alpha_{1,1} \neq 0$. Deze vergelijking heeft dan de oplossing

$$\beta = \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}\,.$$

Omdat $\mathrm{Im}(\beta) = 0$, geldt dat $\mathrm{Im}(\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}) = 0$; i.e. $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1})\mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) + \mathrm{Im}(\alpha_{1,1})\mathrm{Re}(\alpha_{1,0}) = 0$. □

E.3.2 Gevalsonderscheid: $\underline{\alpha}$ sterk of zwak van de eerste of van de tweede soort

We noemen $\underline{\alpha}$ *van de eerste soort* als $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$ en $\underline{\alpha}$ zodanig dat òf $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ en $\mathrm{Im}(\beta) = 0$, òf $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, met $\mu = \frac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}}$ en $\beta = \frac{i\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}}{\alpha_{1,1}^2} - \frac{i\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}}$. We noemen $\underline{\alpha}$ *sterk van de eerste soort* als verder $\mathrm{Im}(\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}) = 0$. We noemen $\underline{\alpha}$ *zwak van de eerste soort*, als $\underline{\alpha}$ van de eerste soort is, en $\underline{\alpha}$ niet sterk van de eerste soort is.

We noemen $\underline{\alpha}$ *van de tweede soort* als $\alpha_{2,0} \neq 0 \neq \alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}$.

Lemma E.9 *Als $\underline{\alpha}$ niet van de eerste of tweede soort is, dan heeft* A *geen eigenwaarden.*
Bewijs Met de resultaten uit de vorige paragraaf is dit direct in te zien: Immers, als $\underline{\alpha}$ niet van de eerste of tweede soort is, dan hebben de vergelijkingen E.2 en E.3 voor μ en β geen eindig aantal ($\neq 0$) oplossingen μ, β met òf $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ en $\mathrm{Im}(\beta) = 0$, òf $\mathrm{Re}(\mu) > 0$. $\square$

We schrijven nu $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}|_{\mathbf{GF}_+}$ en $\mathcal{A}_- = \mathcal{A}|_{\mathbf{GF}_-}$. We beschouwen het eigenwaarde-probleem voor deze twee operatoren.

E.3.3 De oplossing in $\mathbf{GF}_+$

Stelling E.1 *Zij $\underline{\alpha}$ van de eerste soort. Schrijf*

$$\mu = \frac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}}$$

en

$$\beta = \frac{i\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}}{\alpha_{1,1}^2} - \frac{i\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}} .$$

De eigenwaarden van de operator $\mathcal{A}_+$ zijn dan voor te stellen door

$$\lambda_{z,n} = n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta ,$$

met $n \in \mathbb{N}$.

De bijbehorende eigenfuncties worden gegeven door

$$u_{z,n} = \sum_{j=0}^{n} v_{z,n,j}\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} ,$$

waar de coëfficiënten $v_{z,n,j}$, $0 \leq j \leq n$, voldoen aan: als $n \geq 2$:

$$0 = (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \lambda_{z,n})v_{z,n,0} + \alpha_{1,0}v_{z,n,1} ,$$

als $n \geq 3$

$$0 = (\alpha_{0,0} + \alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta - \lambda_{z,n})v_{z,n,1} + 2\alpha_{1,0}v_{z,n,2} ,$$

als $n \geq 4$, $2 \leq j \leq n-2$,

$$0 = (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \lambda_{z,n})v_{z,n,j} + (j+1)\alpha_{1,0}v_{z,n,j+1} ,$$

en als $n \geq 1$:

$$0 = ((n-1)\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \lambda_{z,n})v_{z,n,n-1} + n\alpha_{1,0}v_{z,n,n} .$$

$\square$

Met lemma E.8 volgt:

Lemma E.10 *Als $\mathcal{A}_-(\underline{\alpha})$ een eigenfunctie heeft, dan is $\underline{\alpha}$ sterk van de eerste soort.* $\square$

Stelling E.2 *Zij $\underline{\alpha}$ van de tweede soort. Schrijf*

$$\mu_\pm \quad = \quad \tfrac{\alpha_{1,1}}{4\alpha_{2,0}} \pm \tfrac{1}{4\alpha_{2,0}}\sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}$$

en

$$\beta_\pm \quad = \quad \frac{2\alpha_{1,0}\mu_\pm - \alpha_{0,1}}{4i\alpha_{2,0}\mu_\pm - i\alpha_{1,1}} \, .$$

Definieer de verzameling $PM = PM(\underline{\alpha}) \subset \{+,-\}$ als de verzameling van elementen $\pm$ waarvoor geldt dat òf $\mathrm{Re}(\mu_\pm) = 0$ en $\mathrm{Im}(\beta_\pm) = 0$, òf $\mathrm{Re}(\mu_\pm) > 0$.

De eigenwaarden van de operator $\mathcal{A}$ zijn dan voor te stellen door

$$\lambda_{\pm,n} \quad = \quad n\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta_\pm - \alpha_{2,0}\beta_\pm^2 - 2(2n+1)\alpha_{2,0}\mu_\pm \, ,$$

met $n \in \mathbb{N}$, $\pm \in PM$.

De bijbehorende eigenfuncties worden gegeven door

$$u_{\pm,n} = \sum_{j=0}^{n} \upsilon_{\pm,n,j}\eta_{(\mu_\pm)}^{(j+1,\beta_\pm)} \, ,$$

waar de coëfficiënten $\upsilon_{\pm,n,j}$, $0 \le j \le n$, voldoen aan: als $n \ge 2$:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (\alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2\alpha_{2,0}\mu - \lambda)\upsilon_{\pm,n,0} + (-2i\alpha_{2,0}\beta + \alpha_{1,0})\upsilon_{\pm,n,1} \\ & + 2\alpha_{2,0}\upsilon_{\pm,n,2} \, , \end{aligned}$$

als $n \ge 3$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (\alpha_{0,0} + \alpha_{1,1} - i\alpha_{1,0}\beta - 6\alpha_{2,0}\mu - \alpha_{2,0}\beta^2 - \lambda)\upsilon_{\pm,n,1} \\ & + (2\alpha_{1,0} - 4i\alpha_{2,0}\beta)\upsilon_{\pm,n,2} + 6\alpha_{2,0}\upsilon_{\pm,n,3} \, , \end{aligned}$$

als $n \ge 4$, $2 \le j \le n-2$,

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (j\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - 2(2j+1)\alpha_{2,0}\mu - \lambda)\upsilon_{\pm,n,j} \\ & + ((j+1)\alpha_{1,0} - 2i(j+1)\alpha_{2,0}\beta)\upsilon_{\pm,n,j+1} \\ & + (j+1)(j+2)\alpha_{2,0}\upsilon_{\pm,n,j+2} \, , \end{aligned}$$

en als $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & ((n-1)\alpha_{1,1} - 2(2n-1)\alpha_{2,0}\mu + \alpha_{0,0} - i\alpha_{1,0}\beta - \alpha_{2,0}\beta^2 - \lambda)\upsilon_{\pm,n,n-1} \\ & + (n\alpha_{1,0} - 2in\alpha_{2,0}\beta)\upsilon_{\pm,n,n} \, . \end{aligned}$$

$\square$

E.3.4 De oplossing in GF$_-$

Stelling E.3 *Zij $n \in \mathbb{N}$ en $\underline{\alpha}$ sterk van de eerste soort. Schrijf $\mu = 0$, $\beta = \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}}$ en*

$$\lambda_{s,n} = \alpha_{0,0} - (n+1)\alpha_{1,1} + \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}^2}(\alpha_{0,2}\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1}\alpha_{0,1}) \, .$$

Schrijf verder

$$\underline{\hat{\alpha}} \quad = \quad (-\alpha_{0,2},\ -\alpha_{1,1},\ -i\alpha_{0,1},\ -\alpha_{2,0},\ -i\alpha_{1,0},\ \alpha_{0,0} - \alpha_{1,1}) \, .$$

Zij

$$U_n \quad := \quad \sum_{j=0}^{n} \hat{v}_j \eta_{(0)}^{(j+1, \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})}$$

met $\hat{v}_j$ *voor* $\underline{\hat{\alpha}}$ *oplossing van het stelsel E.5 tot en met E.8.*

Dan vormen $\lambda_{s,n}$, $n \in \mathbb{N}$ *de eigenwaarden van de operator* $\mathcal{A}_-$; *de bijbehorende eigenfuncties zijn*

$$u_{s,n} \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} v_j \eta^{(-j, -\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})}$$

met

$$v_j \quad = \quad \sqrt{2\pi} j! (-i)^j \hat{v}_j \, .$$

Bewijs Omdat $\mathrm{Im}(\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}) = 0$, en dus $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1})\mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) + \mathrm{Im}(\alpha_{1,1})\mathrm{Re}(\alpha_{1,0}) = 0$, is $\mathrm{Im}(\frac{\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}}) = 0$. Dus

$$\eta_{(0)}^{(j+1, \frac{\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}})} \quad \neq \quad 0 \, .$$

Omdat $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, volgt met de lemmata E.2 en E.3 dat de vergelijkingen E.2 en E.3 voor $\underline{\hat{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} -\alpha_{2,0} + 2\alpha_{1,1}\mu - 4\alpha_{0,2}\mu^2 &= 0 \, , \\ i\alpha_{1,1}\beta - 4i\alpha_{0,2}\beta\mu + 2i\alpha_{0,1}\mu - i\alpha_{1,0} &= 0 \, , \end{aligned}$$

een oplossing

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \beta &= \tfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}} \end{aligned}$$

hebben. De eigenwaarden zijn dan

$$\lambda_{s,n} \quad = \quad \alpha_{0,0} - (n+1)\alpha_{1,1} + \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}^2}(\alpha_{0,2}\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}\alpha_{0,1}) \, ,$$

$n \in \mathbb{N}$. Verder heeft, voor $\underline{\hat{\alpha}}$, het stelsel E.5 tot en met E.8 precies één niet-triviale oplossing $\hat{v}_j$, $0 \leq j \leq n$. Met lemma E.1 volgt dan dat

$$U_n \quad := \quad \sum_{j=0}^{n} \hat{v}_j \eta_{(0)}^{(j+1, \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})}$$

eigenfunctie is bij eigenwaarde $\lambda_{s,n}$. Beschouw nu $u_{s,n} = \mathcal{F}^{-1}U_n$. Er geldt

$$\begin{aligned} u_{s,n} &= \sum_{j=0}^{n} \hat{v}_j \mathcal{F}^{-1} \eta_{(0)}^{(j+1, \frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sqrt{2\pi}(-i)^j j! \hat{v}_j \eta^{(-j, -\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})} \\ &= \sum_{j=0}^{n} v_j \eta^{(-j, -\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}})} \, . \end{aligned}$$

Omdat nu $\mathcal{A}(\underline{\hat{\alpha}})U_n = \lambda_{s,n}U_n$, geldt, met lemma 2.1, dat

$$\mathcal{A}(\underline{\alpha})u_{s,n} \quad = \quad \lambda_{s,n}u_{s,n} \, .$$

□

E.4 De propagator ontwikkeld naar zijn eigenfuncties

E.4.1 De propagator op GF, met $\underline{\alpha}$ van de tweede soort

Zij $\underline{\alpha}$ van de tweede soort en PM, $\beta_\pm$, $\mu_\pm$ en $u_{\pm,n}$ als in stelling E.2. Omdat de elementen $\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)}$, $j \in \mathbb{N}$, onderling onafhankelijk zijn, vinden we dan:

Lemma E.11 *De eigenfuncties $u_{\pm,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\pm \in PM$ vormen een onderling onafhankelijk stelsel. Er geldt $\langle\{u_{\pm,n} | n \in \mathbb{N}, \pm \in PM\}\rangle = \langle\{\eta_{(\mu_\pm)}^{(j+1,\beta_\pm)} \mid j \in \mathbb{N}, \pm \in PM\}\rangle$: een deelruimte van de ruimte* **GF**. □

Stelling E.4 *Voor $t \in \mathbb{R}$ is de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$, met*

$$D(\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}) = \langle\{\eta_{(\mu_\pm)}^{(j+1,\beta_\pm)} \mid 0 \leq j \leq N, \pm \in PM\}\rangle ,$$

een operator in $\mathbf{GF}_+$. *Er geldt, voor alle $u \in D(\mathrm{e}^{t\mathcal{A}})$,*

$$\mathrm{e}^{t\mathcal{A}} u = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \kappa_{\pm,j} \mathrm{e}^{\lambda_{\pm,j} t} u_{\pm,j} ,$$

waar de coëfficiënten $\kappa_{\pm,j}$ volgen uit:

$$u = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \kappa_{\pm,j} u_{\pm,j} .$$

Bewijs De functie $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}} u$ is oplossing van het beginwaarde-probleem

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \mathcal{A}u(t) \\ u(0) &= u \end{aligned}$$

met $u \in D(\mathrm{e}^{t\mathcal{A}})$. We substitueren als kandidaat-oplossing een functie van de vorm

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \kappa_{\pm,j}(t) u_{\pm,j} ,$$

waar de coëfficiënten $\kappa_{\pm,j}(t)$ voldoen aan

$$u = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \kappa_{\pm,j}(0) u_{\pm,j} .$$

(Lemma E.11 zegt dat zulke coëfficiënten bestaan.) Er geldt, volgens stelling E.2:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(t) &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \kappa_{\pm,j}(t) \mathcal{A} u_{\pm,j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \kappa_{\pm,j}(t) \lambda_{\pm,j} u_{\pm,j} , \end{aligned}$$

anderzijds geldt

$$\dot{u}(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\pm \in PM} \dot{\kappa}_{\pm,j}(t) u_{\pm,j} .$$

Met de onafhankelijkheid van de eigenfuncties volgt nu

$$\kappa_{\pm,j}(t) = \kappa_{\pm,j}(0) \mathrm{e}^{\lambda_{\pm,j} t} .$$

De aldus gevonden functie $u(t)$ is een, en de enige, oplossing. □

E.4.2 De propagator op GF, met $\underline{\alpha}$ van de eerste soort

Zij $\underline{\alpha}$ van de eerste soort, en zij

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\alpha_{0,2}}{2\alpha_{1,1}} , \\ \beta &= \frac{i\alpha_{1,0}\alpha_{0,2}}{\alpha_{1,1}^2} - \frac{i\alpha_{0,1}}{\alpha_{1,1}} , \\ b &= -\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}} ; \end{aligned}$$

en $u_{z,n}$, $\lambda_{z,n}$ en $u_{s,n}$, $\lambda_{s,n}$ als in de stellingen E.1 en E.3. Dan geldt het volgende.

$\underline{\alpha}$ sterk van de eerste soort

Analoog aan paragraaf E.4.1 vinden we:

Lemma E.12 *Zij $\underline{\alpha}$ sterk van de eerte soort. De eigenfuncties $u_{sz,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $sz \in \{s, z\}$ vormen een onderling onafhankelijk stelsel. Er geldt*

$$\langle \{u_{sz,n} | n \in \mathbb{N}, sz \in \{s, z\}\} \rangle \quad = \quad \langle \{\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta^{(-j,b)} \mid j \in \mathbb{N}\} \rangle \ .$$

Dit stelsel is een deelruimte van de ruimte **GF**. □

Stelling E.5 *Zij $\underline{\alpha}$ sterk van de eerste soort. Dan is, voor $t \in \mathbb{R}$, de operator $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$, met*

$$D(\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}) = \langle \{\eta_{(\mu)}^{(j+1,\beta)} \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta^{(-j,b)} \mid j \in \mathbb{N}\} \rangle \ ,$$

een operator in **GF**. *Er geldt, voor alle $u \in D(\mathrm{e}^{t\mathcal{A}})$,*

$$\mathrm{e}^{t\mathcal{A}} u \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \sum_{sz \in \{s,z\}} \kappa_{sz,j} \mathrm{e}^{\lambda_{sz,j} t} u_{sz,j} \ ,$$

waar de coëfficiënten $\kappa_{sz,j}$ volgen uit:

$$u \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \sum_{sz \in \{s,z\}} \kappa_{sz,j} u_{sz,j} \ .$$

□

$\underline{\alpha}$ zwak van de eerste soort

In dit geval vervallen de eigenwaarden $u_{s,n}$, dus ook het daardoor opgespannen deel van het domein van $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$. Op $\langle \{u_{z,n} \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$ werkt $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}}$ als in $\mathrm{e}^{t\mathcal{A}(\underline{\alpha})}$, met $\underline{\alpha}$ sterk van de eerste soort.

E.4.3 Existentie van een eigenwaarde van $\mathcal{A}$, met $\underline{\alpha}$ van de tweede soort

We onderzoeken enige specifieke gevallen van operatoren $\mathcal{A}(\underline{\alpha})$, en tonen daarmee ook aan dat er $\underline{\alpha}$'s zijn waarvoor $PM \neq \emptyset$: De oplossing van het eigenwaarde-probleem met $\underline{\alpha}$ van de tweede soort is niet triviaal.

De propagator met A diffusieachtig

Ter herinnering: We noemen de operator $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ diffusieachtig als $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) \geq \delta > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) \leq -\delta$ en $|\mathrm{Im}(\alpha_{1,1})| \leq 2\delta - \epsilon < 2\delta$.

Lemma E.13 *Zij $\lambda_{\pm,n}$ en $u_{\pm,n}$ als in stelling E.2. Als* A *diffusieachtig is, en $\alpha_{2,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{0,2}$ alle zuiver reëel zijn, terwijl $\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} \neq 0$, dan worden de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ gegeven door $\lambda_{+,n}$, en de bijbehorende eigenfuncties door $u_{+,n}$.*

Bewijs Als A diffusieachtig, dan is $\underline{\alpha}$ niet van de eerste soort. $\mathcal{A}_-$ heeft dan dus geen eigenfuncties. Omdat $\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} \neq 0$, is $\underline{\alpha}$ van de tweede soort.

We bepalen PM. Er geldt $\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} > \alpha_{1,1}^2 \geq 0$, dus, omdat $\alpha_{2,0} < 0$, $\mu_+ > 0$ en $\mu_- < 0$. We vinden: $PM = \{+\}$. Dit geeft, met stelling E.2, het gestelde. $\square$

De propagator met A golfachtig

Ter herinnering: We noemen de operator $\mathrm{A}(\underline{\alpha})$ golfachtig als $\mathrm{Re}(\alpha_{2,0}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,1}) = \mathrm{Im}(\alpha_{1,0}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,2}) = \mathrm{Re}(\alpha_{0,1}) = 0$.

Lemma E.14 *Als* A *golfachtig is, en $\alpha_{2,0} = 0 \neq \alpha_{1,1}$, dan worden de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ gegeven door $\lambda_{sz,n}$, en de bijbehorende eigenfuncties door $u_{sz,n}$, met $sz \in \{s, z\}$, $n \in \mathbb{N}$, en $\lambda_{sz,n}$, $u_{sz,n}$ als in de stellingen E.1 en E.3.*

Bewijs Bedenk dat, omdat A golfachtig is, $\mathrm{Im}(\alpha_{1,1}\alpha_{1,0}) = 0$. Het lemma volgt nu met de stellingen E.1 en E.3, immers: $\underline{\alpha}$ is sterk van de eerste soort. $\square$

Lemma E.15 *Als* A *golfachtig is, $\alpha_{2,0} \neq 0$, $\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} > 0$, dan worden de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ gegeven door $\lambda_{\pm,n}$ en de bijbehorende eigenfuncties door $u_{\pm,n}$, $\pm \in \{+,-\}$, $n \in \mathbb{N}$, met $\lambda_{\pm,n}$ en $u_{\pm,n}$, als in stelling E.2.*

Bewijs $\underline{\alpha}$ is van de tweede soort. Er geldt $\mathrm{Im}(\alpha_{1,1} \pm \sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}}) = 0$, dus $\mathrm{Re}(\mu_\pm) = 0$. Verder $\mathrm{Im}(\beta_\pm) = 0$. Dit geeft: $PM = \{+,-\}$. $\square$

Lemma E.16 *Als* A *golfachtig is, en* $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1}) = 2\mathrm{Re}(\alpha_{0,0})$ *terwijl $\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2} < 0$ en $\alpha_{2,0} \neq 0 \neq \alpha_{0,2}$, dan worden de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ gegeven door $\lambda_{+,n}$ en de bijbehorende eigenfuncties door $u_{+,n}$, $n \in \mathbb{N}$, met $\lambda_{\pm,n}$ en $u_{\pm,n}$, als in stelling E.2. Verder is, voor alle n, $\lambda_{+,n}$ zuiver imaginair.*

Bewijs $\underline{\alpha}$ is van de tweede soort. Er geldt $\sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 4\alpha_{2,0}\alpha_{0,2}} = iw$, met $w > 0$. Omdat $\mathrm{Re}(\alpha_{1,1}) = 2\mathrm{Re}(\alpha_{0,0})$, is, voor alle $\pm, n$, $\lambda_{\pm,n}$ zuiver imaginair. Dit is met eenvoudig rekenwerk na te gaan.

We berekenen PM. Omdat $\mathrm{Im}(\alpha_{2,0}) > 0$, geldt dat $\mathrm{Re}(\mu_+) > 0$ en $\mathrm{Re}(\mu_-) < 0$, en dus $PM = \{+\}$. De eigenwaarden en eigenfuncties zijn dus $\lambda_{+,n}$ en $u_{+,n}$. (N.B.: Dat de eigenwaarden zuiver imaginair zijn, wisten we natuurlijk al. Immers $\mathcal{A}$ is scheefgeadjungeerd op $L_2(\mathbb{R})$. Verder is $\mathrm{Re}(\mu_+) > 0$ dus $\eta_{(\mu_{+,n})}^{(j+1,\beta_{+,n})} \in L_2(\mathbb{R})$. Dus ook de eigenfuncties, die immers lineaire combinaties zijn van deze basiselementen, zijn $L_2(\mathbb{R})$-functies.)

(Als $\mathrm{Im}(\alpha_{2,0}) < 0$, dan vinden we op dezelfde manier dat $PM = \{-\}$. De resultaten zijn dan gelijksoortig.) $\square$

Bibliografie

[A&S] M. Abramowitz & I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series **55**, (1964)

[G&S] I.M. Gelfand und G.E. Schilow, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, Band I: Veralgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlijn, (1960)

[G1] J. de Graaf, *A Constructive Approach to One-Parameter Semi-Groups of Operators in Hilbert Space*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume **43**, pp. 125 -153, (1971)

[G2] J. de Graaf, *Dictaat Lineaire Analyse 3*, Technische Universiteit Eindhoven

[K] H. Kober, *Dictionary of Conformal Representations*, Dover Publications, USA, (1957)

[L] J.J. Lodder, *Towards a symmetrical theory of generalised functions*, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, (1991)

[R&S 1] Michael Reed & Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, I: Functional Analysis, Academic Press, New York and London, (1972)

[R&S 2] Michael Reed & Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, II: Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press, New York and London, (1975)

[T] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Chelsea Publishing Company, New York, (1948)

[W] Joachim Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, New York, (1980)

[Y] Kôsaku Yosida, *Functional Analysis*, Sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1980)